

MECHANIKA KLASYCZNA I RELATYWISTYCZNA

Geofizyka

Karol Kołodziej

Zestaw 5

1. Funkcja Lagrange'a punktu materialnego dana jest wzorem:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x^2 + y^2, z).$$

Pokazać, że jest ona niezmiennicza przy obrotach względem osi Oz i korzystając z twierdzenia Nöther skonstruować odpowiednią wielkość zachowaną. Zadanie rozwiązać w układzie:

- (a) kartezjańskim,
- (b) cylindrycznym.

Co można powiedzieć o współrzędnej kątowej φ w układzie cylindrycznym?

2. Pokazać, że wektor Lenza

$$\vec{\Lambda} = \frac{\vec{p} \times \vec{L}}{m\alpha} - \frac{\vec{r}}{r},$$

gdzie \vec{r} jest wektorem położenia ciała względem centrum, tzn. źródła siły centralnej, $\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$ jego pędem, a $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ momentem pędu, jest wielkością zachowaną w potencjale Keplera $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$.

Wskazówka. Znaleźć postać siły korzystając ze związku $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(r)$, a następnie pokazać, że $\dot{\vec{\Lambda}} = 0$, wykorzystując fakt, że moment pędu ciała w polu siły centralnej jest zachowany, tzn. $\dot{\vec{L}} = 0$.

3. Pokazać, że z symetrii względem tzw. czystych transformacji Galileusza, tzn. względem transformacji do innego inercjalnego układu odniesienia, wynika reguła dodawania prędkości. (*Patrz wykład 8*).
4. Korzystając z twierdzenia Noether znaleźć 10 wielkości zachowanych wynikających z symetrii względem przekształceń z grupy Galileusza odosobnionego układu N punktów materialnych, w którym energia potencjalna zależy tylko od wzajemnej odległości poszczególnych punktów. (*Patrz wykład 8*).