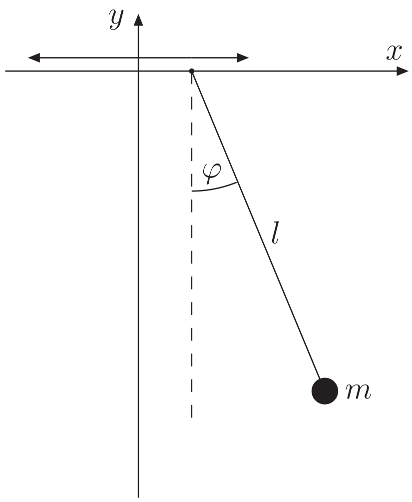
MECHANIKA KLASYCZNA I RELATYWISTYCZNA

Geofizyka

Karol Kołodziej

Zestaw 4

1. 

Punkt zawieszenia wahadła matematycznego wykonuje na osi Ox drgania harmoniczne postaci

$$\tilde{x}(t) = \tilde{A} \sin \Omega t, \qquad \tilde{A}, \Omega = \text{const.}$$

(patrz rysunek).

(a) Korzystając z równań Lagrange'a II rodzaju napisać równanie ruchu.

(b) Rozwiązać równanie ruchu dla małych wychyleń i warunków początkowych:

$$\varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = 0.$$

2. Rozważmy układ N punktów materialnych z k równaniami więzów holonomicznych.

(a) W przypadku więzów skleronomicznych i jeśli nie dokonujemy transformacji do poruszających się układów odniesienia, równania transformacyjne mają postać

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i \left(q_1, \ldots, q_n \right), \qquad i = 1, \ldots, N,$$

gdzie w trójwymiarowej przestrzeni $n = 3N - k$, tzn. że równania transformacyjne nie zawierają jawnej zależności od czasu. Pokazać, że energia kinetyczna jest wówczas jednorodną funkcją kwadratową prędkości uogólnionych $\dot{q}_i$, $i = 1, \ldots, n$,

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} = \sum_{j,l=1}^{n} a_{jl} \dot{q}_j \dot{q}_l \ ,$$

gdzie współczynniki a_{jl} nie zależą od prędkości.

(b) W przypadku więzów reonomicznych lub jeśli dokonujemy transformacji do poruszających się układów odniesienia, równania transformacyjne

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i \left(q_1, \ldots, q_n, t \right), \qquad i = 1, \ldots, N,$$

zależą jawnie od czasu. Pokazać, że wówczas energia kinetyczna wyraża się wzorem

$$T = a + \sum_{j=1}^{n} a_j \dot{q}_j + \sum_{j,l=1}^{n} a_{jl} \dot{q}_j \dot{q}_l \ ,$$

gdzie współczynniki a, a_j i a_{jl} nie zależą od prędkości.

3. (a) Niech $F(x_1, ..., x_n)$ będzie funkcją jednorodną k-tego rzędu, tzn.

$$F(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n) = \lambda^k F(x_1, x_2, ..., x_n) \ ,$$

dla wszystkich $x_1, x_2, ..., x_n$ i dowolnego λ. Pokazać, że

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial}{\partial x_j} F(x_1, ..., x_n) = k F(x_1, ..., x_n) \ .$$

(b) Pokazać, że przy spełnieniu warunków określonych w zadaniu 2(a)

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \, \dot{q}_j = 2T \ .$$