MECHANIKA KLASYCZNA I RELATYWISTYCZNA
Pytania egzaminacyjne dla geofizyki

1. **Pytania podstawowe** *(ograniczenie się do pytań tylko z tej grupy pozwala uzyskać co najwyżej ocenę dobrą)*

   1.1. Krzywoliniowe ortogonalne układy współrzędnych:

   i. sferyczny,

   ii. cylindryczny.

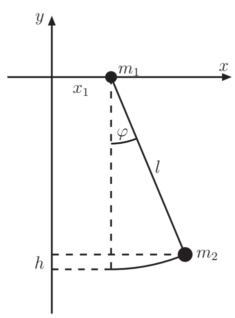
   Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi, zakresy zmienności poszczególnych współrzędnych, linie stałych współrzędnych.

   1.2. Zasady dynamiki Newtona. Która z nich jest spełniona również w zakresie pędkości relatywistycznych.

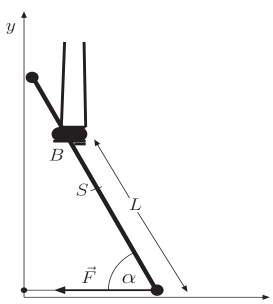
   1.3. Wychodząc z II zasady dynamiki Newtona wyprowadzić wzór na drogę w ruchu ciała pod wpływem stałej siły, przy warunkach początkowych: $x(0) = 0$ dla położenia i $\dot{x}(0) = v_0$ dla prędkości.

   1.4. Klasyfikacja więzów. Podać przykłady układów fizycznych z poszczególnymi rodzajami więzów. W jaki sposób uwzględniamy więzy w równaniach Newtona?

   1.5. Zasada d'Alemberta i równanie d'Alemberta; zasada równowagi.

   1.6. 

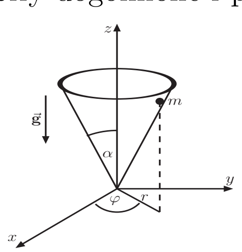
   Wykorzystując równanie d'Alemberta wyprowadzić równania ruchu dla wahadła ze swobodnie ślizgającym się punktem zawieszenia. Patrz rysunek.

   1.7. 

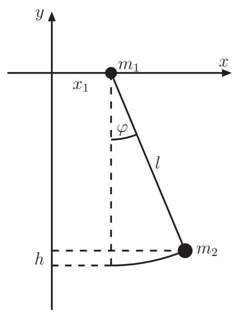
   Człowiek o masie M wchodzi na drabinę o długości l na długość L. Drabina tworzy z podłogą kąt α, a na jej końcach umieszczono rolki, żeby wyeliminować siły tarcia o ścianę i podłogę. Masa drabiny wynosi m. Wykorzystując wynikającą z równania d'Alemberta zasadę równowagi, znaleźć siłę naprężenia liny, którą drabina jest umocowana do ściany. Patrz rysunek.

   1.8. Równania Lagrange'a II rodzaju.

   1.9. Siły uogólnione i potencjał uogólniony.

   1.10. 

   Wykorzystując równania Lagrange'a II rodzaju wyprowadzić równania ruchu dla punktu materialnego o masie m poruszającego się po wewnętrznej powierzchni stożka o kącie półrozwartości α. Patrz rysunek.

1.11. 

Wykorzystując równania Lagrange'a II rodzaju wyprowadzić równania ruchu dla wahadła ze swobodnie ślizgającym się punktem zawieszenia. Patrz rysunek.

1.12. Równania Lagrange'a II rodzaju dla układu N punktów materialnych z tarciem.

1.13. Drgania swobodne jednowymiarowego tłumionego oscylatora harmonicznego.

1.14. Drgania wymuszone jednowymiarowego, tłumionego oscylatora harmonicznego; rezonans.

1.15. Współrzędne cykliczne a prawa zachowania.

1.16. Symetrie układu fizycznego a prawa zachowania; twierdzenie Noether.

1.17. Zasada zachowania energii.

1.18. Pokazać, że ruch odosobnionego układu dwóch ciał można sprowadzić do ruchu jednego ciała o masie zredukowanej i jednostajnego ruchu środka masy układu.

1.19. Równanie ruch punktu materialnego w nieinercjalnym układzie odniesienia. Omówić poszczególne siły bezwładności.

1.20. Podać i omówić wzór na okres obrotu płaszczyzny wahań wahadła matematycznego (wahadło Foucaulta) znajdującego się na szerokości geograficznej φ.

1.21. Energia kinetyczna bryły sztywnej.

1.22. Moment pędu bryły sztywnej.

1.23. Równanie ruchu bryły sztywnej.

1.24. Postulaty szczególnej teorii względności i ich konsekwencje. Dylatacja czasu, skrócenie Fitzgeralda–Lorentza.

1.25. Prawa transformacji Lorentza dla zdarzenia (ct, x, y, z) obserwowanego z dwóch różnych inercjalnych układów odniesienia S i S', przy czym S' porusza się w S ze stałą prędkością $\vec{V} = (V, 0, 0)$. Jaką postać przyjmują wzory transformacyjne w granicy nierelatywistycznej?

1.26. Czteroprędkość i czteropęd; relatywistyczna energia i relatywistyczny pęd. Znaleźć odpowiednie granice nierelatywistyczne.

1.27. Kwadrat normy czterowektora pędu i wynikający stąd relatywistycznie niezmienniczy związek pomiędzy energią i pędem.

1.28. Czteropęd cząstki bezmasowej, czterowektor falowy. Omówić efekt Dopplera dla światła w przypaku, gdy źródło porusza się w kierunku obserwatora.

2. **Pytania trudne** *(wymagane na ocenę bardzo dobrą)*

2.1. Wyprowadzić równanie d'Alemberta dla układu N punktów materialnych z II zasady dynamiki Newtona.

2.2. Pokazać niezmienniczość równań Lagrange'a II rodzaju przy transformacjach punktowych: $q_i \to Q_i = Q_i(q_1, ..., q_n, t)$, $i = 1, \ldots, n$.

2.3. Pokazać niezmienniczość równań Lagrange'a II rodzaju przy transformacji cechowania funkcji Lagrange'a $L(q, \dot{q}, t) = L(q_1, ..., q_n, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_n, t)$:

$$L(q, \dot{q}, t) \to L(q, \dot{q}, t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(q, t),$$

gdzie $F(q, t) = F(q_1, ..., q_n, t)$ jest dowolną różniczkowalną funkcją współrzędnych uogólnionych i czasu.

2.4. Funkcja dyssypacji dla sił tarcia postaci

$$\vec{T}_i = -h_i(v_i)\frac{\vec{v}_i}{v_i}, \quad i = 1, ..., N, \qquad v_i = |\vec{v}_i|.$$

2.5. Zasada zachowania energii – wyprowadzenie.

2.6. Wyprowadzić równanie ruchu punktu materialnego w nieinercjalnym układzie odniesienia.

2.7. Wyprowadzić równanie ruchu bryły sztywnej wykorzystując II i III zasadę dynamiki Newtona.

2.8. Wyprowadzić równania Eulera dla bryły sztywnej.

2.9. Ruch ciała w polu siły centralnej. Udowodnić, że moment pędu ciała względem centrum siły jest zachowany, a ruch odbywa się w płaszczyźnie prostopadłej do wektora momentu pędu.

2.10. Czasoprzestrzeń Minkowskiego. Kontra- i kowariantny czterowektor położenia, iloczyn skalarny, interwał dwóch zdarzeń.

2.11. Pokazać niezmienniczość iloczynu skalarnego czterowektorów w czasoprzestrzeni Minkowskiego przy transformacji Lorentza polegającej na przejściu pomiędzy układami inercjalnymi S i S', przy czym S' porusza się w S ze stałą prędkością $\vec{V} = (V, 0, 0)$.

2.12. Wiązka protonów zderza się z protonami tarczy. Znaleźć związek pomiędzy energią całkowitą dwóch zderzających się protonów w układzie laboratoryjnym, w którym tarcza spoczywa z ich energią całkowitą w układzie środka masy.

2.13. Czteropęd cząstki bezmasowej, czterowektor falowy i efekt Dopplera dla światła w przypaku, gdy źródło porusza się pod kątem θ do obserwatora.

2.14. Pokazać, że dla siły zdefiniowanej wzorem $\vec{F} = \mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t$ spełniony jest relatywistyczny związek pomiędzy przyrostem energii kinetycznej ciała a wykonaną nad nim pracą. Założyć, że masa ciała nie zmienia się w czasie.

3. **Pytania trudne do wyboru** *(jedno pytanie do wyboru przez osobę zdającą)*

3.1. Wyprowadzić równania Lagrange'a II rodzaju z równania d'Alemberta.

3.2. Pokazać, że siłę Lorentza $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$ działającą na cząstkę o masie m i ładunku elektrycznym q w polu elektromagnetycznym o natężeniu $\vec{E}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}, t) - \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t}$ i indukcji $\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t)$ gdzie $\varphi(\vec{r}, t)$ i $\vec{A}(\vec{r}, t)$ są odpowiednio potencjałami skalarnym i wektorowym, można wyprowadzić z potencjału uogólnionego postaci $V(\vec{r}, \vec{v}, t) = q\left(\varphi(\vec{r}, t) - \vec{A}(\vec{r}, t) \cdot \vec{v}\right)$.

3.3. Udowodnić twierdzenie Noether.

3.4. Pokazać, że niezmienniczość funkcji Lagrange'a odosobnionego układu N punktów materialnych, których energia potencjalna wzajemnego oddziaływania zależy od ich odległości

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} - \sum_{i<j} V_{ij} \left(|\vec{r}_i - \vec{r}_j| \right)$$

względem

i. transformacji czasu prowadzi do zachowania energii,
ii. translacji przestrzennej prowadzi do zachowania pędu,
iii. obrotów prowadzi do zachowania momentu pędu,
iv. czystej transformacji Galileusza (transformacji do układu poruszającego się ze stałą prędkością $\vec{v}$) prowadzi do zachowania pewnej wielkości opisującej ruch środka masy układu.

3.5. Ruch ciała o masie m w potencjale Keplera $V(r) = -\alpha/r$, gdzie $\alpha = \text{const.} > 0$.

3.6. Ruch w polu stałej siły $\vec{F} = \mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t = \text{const.}$ Znaleźć zależność $\vec{x}(t)$ przy założeniu, że w chwili $t = 0$ ciało spoczywa w początku układu, czyli $\vec{x}(0) = \vec{0}$ i $\vec{v}(0) = \vec{0}$, a masa ciała nie zależy od czasu.