Problem ruchu dwóch ciał

Wykład 9

Karol Kołodziej

Instytut Fizyki
Uniwersytet Śląski, Katowice
http://kk.us.edu.pl

Rozważymy problem ruchu dwóch ciał odosobnionych o masach m_1 i m_2.

Równania ruchu wynikają bezpośrednio z II zasady dynamiki Newtona

$$m_1 \ddot{\vec{r}_1} = \vec{F}\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}_1}, \dot{\vec{r}_2}, t\right),$$

Problem ruchu dwóch ciał

Rozważymy problem ruchu dwóch ciał odosobnionych o masach m_1 i m_2.

Równania ruchu wynikają bezpośrednio z II zasady dynamiki Newtona

$$m_1 \ddot{\vec{r_1}} = \vec{F}\left(\vec{r_1}, \vec{r_2}, \dot{\vec{r_1}}, \dot{\vec{r_2}}, t\right),$$

$$m_2 \ddot{\vec{r_2}}$$

Rozważymy problem ruchu dwóch ciał odosobnionych o masach m_1 i m_2.
Równania ruchu wynikają bezpośrednio z II zasady dynamiki Newtona

$$
\begin{aligned}
m_1 \ddot{\vec{r_1}} &= \vec{F}\left(\vec{r_1}, \vec{r_2}, \dot{\vec{r_1}}, \dot{\vec{r_2}}, t\right), \\
m_2 \ddot{\vec{r_2}} &=
\end{aligned}
$$

Problem ruchu dwóch ciał

Rozważymy problem ruchu dwóch ciał odosobnionych o masach m_1 i m_2.

Równania ruchu wynikają bezpośrednio z **II** zasady dynamiki Newtona

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, t\right), \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, t\right), \end{aligned}$$

Rozważymy problem ruchu dwóch ciał odosobnionych o masach m_1 i m_2.
Równania ruchu wynikają bezpośrednio z II zasady dynamiki Newtona

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, t\right), \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, t\right), \end{aligned}$$

gdzie $\vec{r}_i$ i $\dot{\vec{r}}_i$, $i = 1, 2$, są wektorami położenia i prędkości ciał w dowolnie wybranym układzie odniesienia,

Problem ruchu dwóch ciał

Rozważymy problem ruchu dwóch ciał odosobnionych o masach m_1 i m_2.

Równania ruchu wynikają bezpośrednio z II zasady dynamiki Newtona

$$
\begin{aligned}
m_1 \ddot{\vec{r}_1} &= \vec{F}\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}_1}, \dot{\vec{r}_2}, t\right), \\
m_2 \ddot{\vec{r}_2} &= -\vec{F}\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}_1}, \dot{\vec{r}_2}, t\right),
\end{aligned}
$$

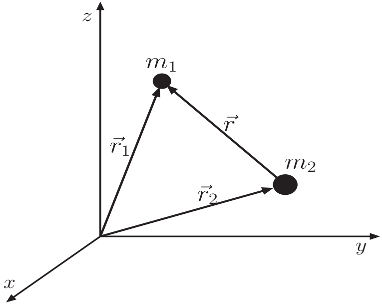
gdzie $\vec{r}_i$ i $\dot{\vec{r}_i}$, $i = 1, 2$, są wektorami położenia i prędkości ciał w dowolnie wybranym układzie odniesienia, a w drugim równaniu skorzystaliśmy z III zasady dynamiki Newtona.

Rozważymy problem ruchu dwóch ciał odosobnionych o masach m_1 i m_2.
Równania ruchu wynikają bezpośrednio z II zasady dynamiki Newtona

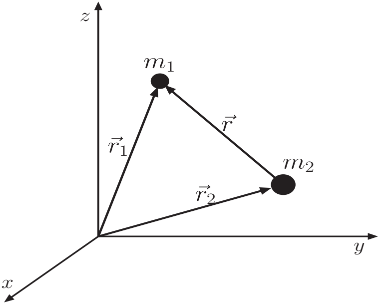
$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}_1} &= \vec{F}\left(\vec{r_1}, \vec{r_2}, \dot{\vec{r}_1}, \dot{\vec{r}_2}, t\right), \\ m_2 \ddot{\vec{r}_2} &= -\vec{F}\left(\vec{r_1}, \vec{r_2}, \dot{\vec{r}_1}, \dot{\vec{r}_2}, t\right), \end{aligned}$$

gdzie $\vec{r_i}$ i $\dot{\vec{r}_i}$, $i = 1, 2$, są wektorami położenia i prędkości ciał w dowolnie wybranym układzie odniesienia, a w drugim równaniu skorzystaliśmy z III zasady dynamiki Newtona.

Rozpatrywany układ dwóch ciał możemy obserwować z dowolnie wybranego układu odniesienia.

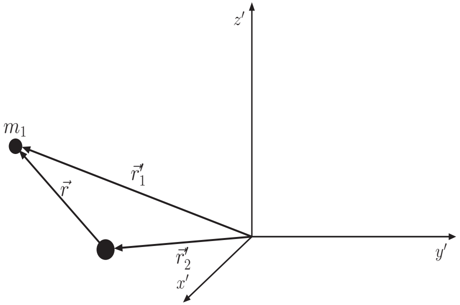


Rozpatrywany układ dwóch ciał możemy obserwować z dowolnie wybranego układu odniesienia.

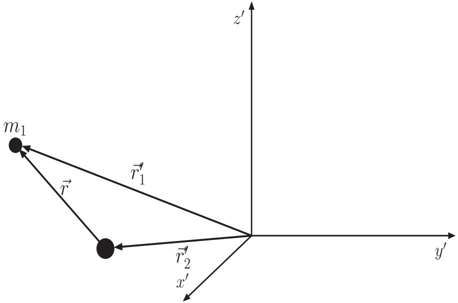


Układ współrzędnych możemy wybrać inaczej, np. możemy przesunąć go równolegle o pewien wektor

Układ współrzędnych możemy wybrać inaczej, np. możemy przesunąć go równolegle o pewien wektor

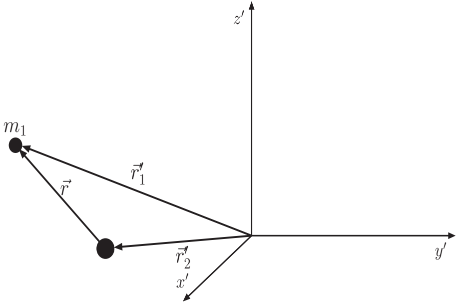


Układ współrzędnych możemy wybrać inaczej, np. możemy przesunąć go równolegle o pewien wektor



Widzimy, że wektory położenia $\vec{r}_1$ i $\vec{r}_2$ są teraz zupełnie inne.

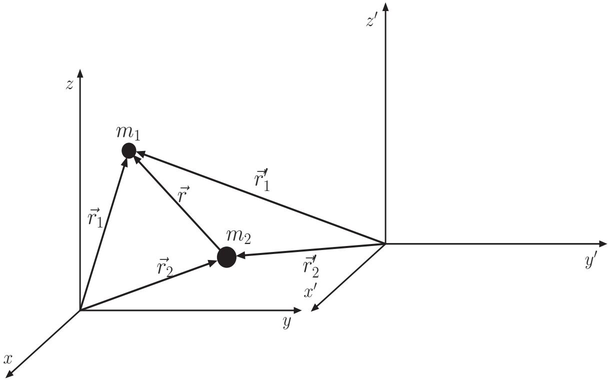
Układ współrzędnych możemy wybrać inaczej, np. możemy przesunąć go równolegle o pewien wektor



Widzimy, że wektory położenia $\vec{r}_1$ i $\vec{r}_2$ są teraz zupełnie inne.

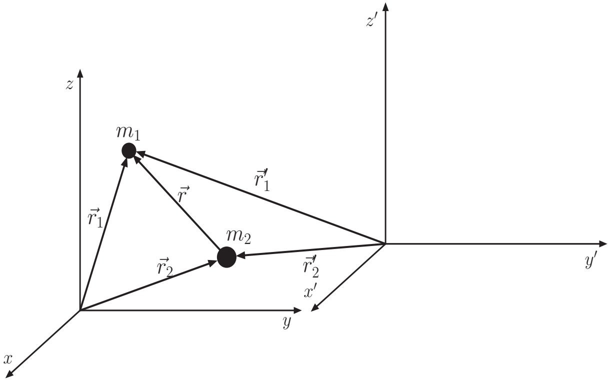
Tylko wektor różnicy położeń

$$\vec{r} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$



Tylko wektor różnicy położeń

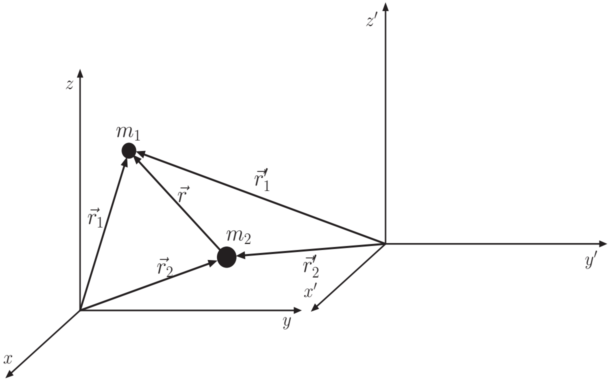
$$\vec{r} \equiv \vec{r_1} - \vec{r_2}$$



pozostaje niezmieniony przy operacji przesunięcia układu współrzędnych.

Tylko wektor różnicy położeń

$$\vec{r} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$



pozostaje niezmieniony przy operacji przesunięcia układu współrzędnych.

Problem ruchu dwóch ciał

Dlatego siła oddziaływania $\vec{F}$ obu ciał może zależeć tylko od względnego położenia $\vec{r} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Podobnie, wykorzystując fakt, że rozpatrywany układ dwóch ciał możemy obserwować z dowolnie wybranego inercjalnego układu odniesienia, dochodzimy do wniosku, że siła $\vec{F}$ może zależeć tylko od względnej prędkości $\dot{\vec{r}} \equiv \dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{r}}_2$ obu ciał i od czasu.

Dlatego siła oddziaływania $\vec{F}$ obu ciał może zależeć tylko od względnego położenia $\vec{r} \equiv \vec{r_1} - \vec{r_2}$. Podobnie, wykorzystując fakt, że rozpatrywany układ dwóch ciał możemy obserwować z dowolnie wybranego inercjalnego układu odniesienia, dochodzimy do wniosku, że siła $\vec{F}$ może zależeć tylko od względnej prędkości $\dot{\vec{r}} \equiv \dot{\vec{r_1}} - \dot{\vec{r_2}}$ obu ciał i od czasu. Zatem równania ruchu przyjmują postać

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r_1}} &= \vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right), \\ m_2 \ddot{\vec{r_2}} &= -\vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right). \end{aligned}$$

Dlatego siła oddziaływania $\vec{F}$ obu ciał może zależeć tylko od względnego położenia $\vec{r} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Podobnie, wykorzystując fakt, że rozpatrywany układ dwóch ciał możemy obserwować z dowolnie wybranego inercjalnego układu odniesienia, dochodzimy do wniosku, że siła $\vec{F}$ może zależeć tylko od względnej prędkości $\dot{\vec{r}} \equiv \dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{r}}_2$ obu ciał i od czasu. Zatem równania ruchu przyjmują postać

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right), \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right). \end{aligned}$$

Dodajmy stronami oba równania

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = 0$$

Dlatego siła oddziaływania $\vec{F}$ obu ciał może zależeć tylko od względnego położenia $\vec{r} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Podobnie, wykorzystując fakt, że rozpatrywany układ dwóch ciał możemy obserwować z dowolnie wybranego inercjalnego układu odniesienia, dochodzimy do wniosku, że siła $\vec{F}$ może zależeć tylko od względnej prędkości $\dot{\vec{r}} \equiv \dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{r}}_2$ obu ciał i od czasu. Zatem równania ruchu przyjmują postać

$$
\begin{aligned}
m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right), \\
m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right).
\end{aligned}
$$

Dodajmy stronami oba równania

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = 0$$

i podzielmy obie strony przez $m_1 + m_2$

$$\frac{m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2}{m_1 + m_2} = 0.$$

Problem ruchu dwóch ciał

Dlatego siła oddziaływania $\vec{F}$ obu ciał może zależeć tylko od względnego położenia $\vec{r} \equiv \vec{r_1} - \vec{r_2}$. Podobnie, wykorzystując fakt, że rozpatrywany układ dwóch ciał możemy obserwować z dowolnie wybranego inercjalnego układu odniesienia, dochodzimy do wniosku, że siła $\vec{F}$ może zależeć tylko od względnej prędkości $\dot{\vec{r}} \equiv \dot{\vec{r_1}} - \dot{\vec{r_2}}$ obu ciał i od czasu. Zatem równania ruchu przyjmują postać

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r_1}} &= \vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right), \\ m_2 \ddot{\vec{r_2}} &= -\vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right). \end{aligned}$$

Dodajmy stronami oba równania

$$m_1 \ddot{\vec{r_1}} + m_2 \ddot{\vec{r_2}} = 0$$

i podzielmy obie strony przez $m_1 + m_2$

$$\frac{m_1 \ddot{\vec{r_1}} + m_2 \ddot{\vec{r_2}}}{m_1 + m_2} = 0.$$

Problem ruchu dwóch ciał

Po lewej stronie otrzymanego równania występuje druga pochodna czasowa wektora

$$\vec{R} \equiv \frac{m_1 \vec{r_1} + m_2 \vec{r_2}}{m_1 + m_2},$$

który opisuje położenie środka masy rozpatrywanego układu dwóch ciał.

Po lewej stronie otrzymanego równania występuje druga pochodna czasowa wektora

$$\vec{R} \equiv \frac{m_1 \vec{r_1} + m_2 \vec{r_2}}{m_1 + m_2},$$

który opisuje położenie środka masy rozpatrywanego układu dwóch ciał.

Otrzymane równanie przyjmuje więc postać

$$\frac{m_1 \ddot{\vec{r_1}} + m_2 \ddot{\vec{r_2}}}{m_1 + m_2} = \ddot{\vec{R}} = 0$$

Problem ruchu dwóch ciał

Po lewej stronie otrzymanego równania występuje druga pochodna czasowa wektora

$$\vec{R} \equiv \frac{m_1 \vec{r_1} + m_2 \vec{r_2}}{m_1 + m_2},$$

który opisuje położenie środka masy rozpatrywanego układu dwóch ciał.
Otrzymane równanie przyjmuje więc postać

$$\frac{m_1 \ddot{\vec{r_1}} + m_2 \ddot{\vec{r_2}}}{m_1 + m_2} = \ddot{\vec{R}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{R}} = \mathrm{const.}$$

Po lewej stronie otrzymanego równania występuje druga pochodna czasowa wektora

$$\vec{R} \equiv \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2},$$

który opisuje położenie środka masy rozpatrywanego układu dwóch ciał.
Otrzymane równanie przyjmuje więc postać

$$\frac{m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2}{m_1 + m_2} = \ddot{\vec{R}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{R}} = \mathrm{const.}$$

Wnioskujemy stąd, że środek masy odosobnionego układu dwóch ciał porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.

Po lewej stronie otrzymanego równania występuje druga pochodna czasowa wektora

$$\vec{R} \equiv \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2},$$

który opisuje położenie środka masy rozpatrywanego układu dwóch ciał.
Otrzymane równanie przyjmuje więc postać

$$\frac{m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2}{m_1 + m_2} = \ddot{\vec{R}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{R}} = \mathrm{const.}$$

Wnioskujemy stąd, że środek masy odosobnionego układu dwóch ciał porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.

Ta konkluzja wiąże się bezpośrednio z symetrią odosobnionego układu punktów materialnych względem transformacji Galileusza, a ściślej z niezmienniczością układu fizycznego przy przejściu do dowolnego innego układu inercjalnego.

Ta konkluzja wiąże się bezpośrednio z symetrią odosobnionego układu punktów materialnych względem transformacji Galileusza, a ściślej z niezmienniczością układu fizycznego przy przejściu do dowolnego innego układu inercjalnego.

Problem ruchu dwóch ciał

Wróćmy do naszego układu równań ruchu

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right),$$
$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -\vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right).$$

Pomnóżmy pierwsze równanie ruchu przez $\frac{m_2}{m_1+m_2}$,

Wróćmy do naszego układu równań ruchu

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right), \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right). \end{aligned}$$

Pomnóżmy pierwsze równanie ruchu przez $\frac{m_2}{m_1+m_2}$, a drugie przez $\frac{m_1}{m_1+m_2}$,

Wróćmy do naszego układu równań ruchu

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}_1} &= \vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right), \\ m_2 \ddot{\vec{r}_2} &= -\vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right). \end{aligned}$$

Pomnóżmy pierwsze równanie ruchu przez $\frac{m_2}{m_1+m_2}$, a drugie przez $\frac{m_1}{m_1+m_2}$, wówczas otrzymamy układ równań

Wróćmy do naszego układu równań ruchu

$$
\begin{aligned}
m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right), \\
m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right).
\end{aligned}
$$

Pomnóżmy pierwsze równanie ruchu przez $\frac{m_2}{m_1+m_2}$, a drugie przez $\frac{m_1}{m_1+m_2}$, wówczas otrzymamy układ równań

$$
\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}}_1
$$

Wróćmy do naszego układu równań ruchu

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right),$$
$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -\vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right).$$

Pomnóżmy pierwsze równanie ruchu przez $\frac{m_2}{m_1+m_2}$, a drugie przez $\frac{m_1}{m_1+m_2}$, wówczas otrzymamy układ równań

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}}_1 =$$

Wróćmy do naszego układu równań ruchu

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r_1}} &= \vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right), \\ m_2 \ddot{\vec{r_2}} &= -\vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right). \end{aligned}$$

Pomnóżmy pierwsze równanie ruchu przez $\frac{m_2}{m_1+m_2}$, a drugie przez $\frac{m_1}{m_1+m_2}$, wówczas otrzymamy układ równań

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\ddot{\vec{r_1}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right),$$

Wróćmy do naszego układu równań ruchu

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right), \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right). \end{aligned}$$

Pomnóżmy pierwsze równanie ruchu przez $\frac{m_2}{m_1+m_2}$, a drugie przez $\frac{m_1}{m_1+m_2}$, wówczas otrzymamy układ równań

$$\begin{aligned} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}}_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right), \\ \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}}_2 & \end{aligned}$$

Problem ruchu dwóch ciał

Wróćmy do naszego układu równań ruchu

$$
\begin{aligned}
m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right), \\
m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right).
\end{aligned}
$$

Pomnóżmy pierwsze równanie ruchu przez $\frac{m_2}{m_1+m_2}$, a drugie przez $\frac{m_1}{m_1+m_2}$, wówczas otrzymamy układ równań

$$
\begin{aligned}
\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}}_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right), \\
\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}}_2 &=
\end{aligned}
$$

Problem ruchu dwóch ciał

Wróćmy do naszego układu równań ruchu

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right), \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right). \end{aligned}$$

Pomnóżmy pierwsze równanie ruchu przez $\frac{m_2}{m_1+m_2}$, a drugie przez $\frac{m_1}{m_1+m_2}$, wówczas otrzymamy układ równań

$$\begin{aligned} \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \ddot{\vec{r}}_1 &= \frac{m_2}{m_1+m_2} \vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right), \\ \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \ddot{\vec{r}}_2 &= -\frac{m_1}{m_1+m_2} \vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right). \end{aligned}$$

Problem ruchu dwóch ciał

Wróćmy do naszego układu równań ruchu

$$
\begin{aligned}
m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right), \\
m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right).
\end{aligned}
$$

Pomnóżmy pierwsze równanie ruchu przez $\frac{m_2}{m_1+m_2}$, a drugie przez $\frac{m_1}{m_1+m_2}$, wówczas otrzymamy układ równań

$$
\begin{aligned}
\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \ddot{\vec{r}}_1 &= \frac{m_2}{m_1+m_2} \vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right), \\
\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \ddot{\vec{r}}_2 &= -\frac{m_1}{m_1+m_2} \vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right).
\end{aligned}
$$

Odejmijmy stronami drugie równanie od pierwszego

Wróćmy do naszego układu równań ruchu

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right), \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right). \end{aligned}$$

Pomnóżmy pierwsze równanie ruchu przez $\frac{m_2}{m_1+m_2}$, a drugie przez $\frac{m_1}{m_1+m_2}$, wówczas otrzymamy układ równań

$$\begin{aligned} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}}_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right), \\ \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}}_2 &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right). \end{aligned}$$

Odejmijmy stronami drugie równanie od pierwszego

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2\right) =$$

Problem ruchu dwóch ciał

Wróćmy do naszego układu równań ruchu

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right), \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right). \end{aligned}$$

Pomnóżmy pierwsze równanie ruchu przez $\frac{m_2}{m_1+m_2}$, a drugie przez $\frac{m_1}{m_1+m_2}$, wówczas otrzymamy układ równań

$$\begin{aligned} \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \ddot{\vec{r}}_1 &= \frac{m_2}{m_1+m_2} \vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right), \\ \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \ddot{\vec{r}}_2 &= -\frac{m_1}{m_1+m_2} \vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right). \end{aligned}$$

Odejmijmy stronami drugie równanie od pierwszego

$$\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\left(\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2\right) = \left(\frac{m_2}{m_1+m_2} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\right) \vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right) =$$

Wróćmy do naszego układu równań ruchu

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right), \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right). \end{aligned}$$

Pomnóżmy pierwsze równanie ruchu przez $\frac{m_2}{m_1+m_2}$, a drugie przez $\frac{m_1}{m_1+m_2}$, wówczas otrzymamy układ równań

$$\begin{aligned} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\, \ddot{\vec{r}}_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2}\, \vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right), \\ \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\, \ddot{\vec{r}}_2 &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\, \vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right). \end{aligned}$$

Odejmijmy stronami drugie równanie od pierwszego

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2\right) = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) \vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right) = \vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right).$$

Problem ruchu dwóch ciał

Wróćmy do naszego układu równań ruchu

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right), \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right). \end{aligned}$$

Pomnóżmy pierwsze równanie ruchu przez $\frac{m_2}{m_1+m_2}$, a drugie przez $\frac{m_1}{m_1+m_2}$, wówczas otrzymamy układ równań

$$\begin{aligned} \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\,\ddot{\vec{r}}_1 &= \frac{m_2}{m_1+m_2}\,\vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right), \\ \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\,\ddot{\vec{r}}_2 &= -\frac{m_1}{m_1+m_2}\,\vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right). \end{aligned}$$

Odejmijmy stronami drugie równanie od pierwszego

$$\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\left(\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2\right) = \left(\frac{m_2}{m_1+m_2} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\right)\vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right) = \vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right).$$

Zdefiniujmy masę zredukowaną układu dwóch ciał

$$m \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}.$$

Zdefiniujmy masę zredukowaną układu dwóch ciał

$$m \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}.$$

Wówczas nasze równanie przyjmie postać

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right).$$

Problem ruchu dwóch ciał

Zdefiniujmy masę zredukowaną układu dwóch ciał

$$m \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}.$$

Wówczas nasze równanie przyjmie postać

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right).$$

Widzimy, że problem ruchu dwóch ciał został sprowadzony do

- ruchu ciała o masie zredukowanej pod wpływem takiej samej siły, którą ciała wzajemnie na siebie oddziaływują,

Problem ruchu dwóch ciał

Zdefiniujmy masę zredukowaną układu dwóch ciał

$$m \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}.$$

Wówczas nasze równanie przyjmie postać

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right).$$

Widzimy, że problem ruchu dwóch ciał został sprowadzony do

- ruchu ciała o masie zredukowanej pod wpływem takiej samej siły, którą ciała wzajemnie na siebie oddziaływują,
- jednostajnego ruchu środka masy.

Problem ruchu dwóch ciał

Zdefiniujmy masę zredukowaną układu dwóch ciał

$$m \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}.$$

Wówczas nasze równanie przyjmie postać

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right).$$

Widzimy, że problem ruchu dwóch ciał został sprowadzony do

- ruchu ciała o masie zredukowanej pod wpływem takiej samej siły, którą ciała wzajemnie na siebie oddziaływują,
- jednostajnego ruchu środka masy.

Przykład 1. Rozważmy ruch układu Słońce–Ziemia. Masa Słońca m_S to około 2×10^{30} kg, *Przykład 1.* Rozważmy ruch układu Słońce–Ziemia. Masa Słońca m_S to około 2×10^{30} kg, a masa Ziemi $m_Z \approx 6 \times 10^{24}$ kg,

Przykład 1. Rozważmy ruch układu Słońce–Ziemia. Masa Słońca m_S to około 2×10^{30} kg, a masa Ziemi $m_Z \approx 6 \times 10^{24}$ kg, a zatem

$$m_S \gg m_Z$$

Przykład 1. Rozważmy ruch układu Słońce–Ziemia. Masa Słońca m_S to około 2×10^{30} kg, a masa Ziemi $m_Z \approx 6 \times 10^{24}$ kg, a zatem

$$m_S \gg m_Z \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{m_Z} \gg \frac{1}{m_S}$$

Przykład 1. Rozważmy ruch układu Słońce–Ziemia. Masa Słońca m_S to około 2×10^{30} kg, a masa Ziemi $m_Z \approx 6 \times 10^{24}$ kg, a zatem

$$m_S \gg m_Z \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{m_Z} \gg \frac{1}{m_S} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{m_S} + \frac{1}{m_Z}$$

Przykład 1. Rozważmy ruch układu Słońce–Ziemia. Masa Słońca m_S to około 2×10^{30} kg, a masa Ziemi $m_Z \approx 6 \times 10^{24}$ kg, a zatem

$$m_S \gg m_Z \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{m_Z} \gg \frac{1}{m_S} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{m_S} + \frac{1}{m_Z} \approx \frac{1}{m_Z},$$

Przykład 1. Rozważmy ruch układu Słońce–Ziemia. Masa Słońca m_S to około 2×10^{30} kg, a masa Ziemi $m_Z \approx 6 \times 10^{24}$ kg, a zatem

$$m_S \gg m_Z \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{m_Z} \gg \frac{1}{m_S} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{m_S} + \frac{1}{m_Z} \approx \frac{1}{m_Z},$$

skąd wynika, że masa zredukowana układu jest w bardzo dobrym przybliżeniu równa masie Ziemi, $m \approx m_Z$.

Przykład 1. Rozważmy ruch układu Słońce–Ziemia. Masa Słońca m_S to około 2×10^{30} kg, a masa Ziemi $m_Z \approx 6 \times 10^{24}$ kg, a zatem

$$m_S \gg m_Z \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{m_Z} \gg \frac{1}{m_S} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{m_S} + \frac{1}{m_Z} \approx \frac{1}{m_Z},$$

skąd wynika, że masa zredukowana układu jest w bardzo dobrym przybliżeniu równa masie Ziemi, $m \approx m_Z$.

Odwróćmy związki definicyjne na wektory określające położenie względne i położenie środka masy

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r_S} - \vec{r_Z} \\ \vec{R} = \frac{m_S \vec{r_S} + m_Z \vec{r_Z}}{m_S + m_Z} \end{cases}$$

Przykład 1. Rozważmy ruch układu Słońce–Ziemia. Masa Słońca m_S to około 2×10^{30} kg, a masa Ziemi $m_Z \approx 6 \times 10^{24}$ kg, a zatem

$$m_S \gg m_Z \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{m_Z} \gg \frac{1}{m_S} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{m_S} + \frac{1}{m_Z} \approx \frac{1}{m_Z},$$

skąd wynika, że masa zredukowana układu jest w bardzo dobrym przybliżeniu równa masie Ziemi, $m \approx m_Z$.
Odwróćmy związki definicyjne na wektory określające położenie względne i położenie środka masy

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r_S} - \vec{r_Z} \\ \vec{R} = \frac{m_S \vec{r_S} + m_Z \vec{r_Z}}{m_S + m_Z} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \vec{r_S} = \frac{m_Z}{m_S + m_Z}\vec{r} + \vec{R} \\ \vec{r_Z} = -\frac{m_S}{m_S + m_Z}\vec{r} + \vec{R} \end{cases}$$

Przykład 1. Rozważmy ruch układu Słońce–Ziemia. Masa Słońca m_S to około 2×10^{30} kg, a masa Ziemi $m_Z \approx 6 \times 10^{24}$ kg, a zatem

$$m_S \gg m_Z \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{m_Z} \gg \frac{1}{m_S} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{m_S} + \frac{1}{m_Z} \approx \frac{1}{m_Z},$$

skąd wynika, że masa zredukowana układu jest w bardzo dobrym przybliżeniu równa masie Ziemi, $m \approx m_Z$.
Odwróćmy związki definicyjne na wektory określające położenie względne i położenie środka masy

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r_S} - \vec{r_Z} \\ \vec{R} = \frac{m_S \vec{r_S} + m_Z \vec{r_Z}}{m_S + m_Z} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \vec{r_S} = \frac{m_Z}{m_S + m_Z} \vec{r} + \vec{R} \\ \vec{r_Z} = -\frac{m_S}{m_S + m_Z} \vec{r} + \vec{R} \end{cases}$$

Pomińmy nieistotny dla ruchu względnego wektor $\vec{R}$ i obliczmy

$$\frac{|\vec{r_S}|}{|\vec{r_Z}|} = \frac{\left|\frac{m_Z}{m_S+m_Z}\vec{r}\right|}{\left|-\frac{m_S}{m_S+m_Z}\vec{r}\right|} =$$

Pomińmy nieistotny dla ruchu względnego wektor $\vec{R}$ i obliczmy

$$\frac{|\vec{r_S}|}{|\vec{r_Z}|} = \frac{\left|\frac{m_Z}{m_S+m_Z}\vec{r}\right|}{\left|-\frac{m_S}{m_S+m_Z}\vec{r}\right|} = \frac{\frac{m_Z}{m_S+m_Z}\,|\vec{r}|}{\frac{m_S}{m_S+m_Z}\,|\vec{r}|} =$$

Pomińmy nieistotny dla ruchu względnego wektor $\vec{R}$ i obliczmy

$$\frac{|\vec{r_S}|}{|\vec{r_Z}|} = \frac{\left|\frac{m_Z}{m_S+m_Z}\vec{r}\right|}{\left|-\frac{m_S}{m_S+m_Z}\vec{r}\right|} = \frac{\frac{m_Z}{m_S+m_Z}\,|\vec{r}|}{\frac{m_S}{m_S+m_Z}\,|\vec{r}|} = \frac{m_Z}{m_S} \approx$$

Pomińmy nieistotny dla ruchu względnego wektor $\vec{R}$ i obliczmy

$$\frac{|\vec{r_S}|}{|\vec{r_Z}|} = \frac{\left|\frac{m_Z}{m_S+m_Z}\vec{r}\right|}{\left|-\frac{m_S}{m_S+m_Z}\vec{r}\right|} = \frac{\frac{m_Z}{m_S+m_Z}\,|\vec{r}|}{\frac{m_S}{m_S+m_Z}\,|\vec{r}|} = \frac{m_Z}{m_S} \approx \frac{6\times 10^{24}\ \mathrm{kg}}{2\times 10^{30}\ \mathrm{kg}} =$$

Pomińmy nieistotny dla ruchu względnego wektor $\vec{R}$ i obliczmy

$$\frac{|\vec{r_S}|}{|\vec{r_Z}|} = \frac{\left|\frac{m_Z}{m_S+m_Z}\vec{r}\right|}{\left|-\frac{m_S}{m_S+m_Z}\vec{r}\right|} = \frac{\frac{m_Z}{m_S+m_Z}\,|\vec{r}|}{\frac{m_S}{m_S+m_Z}\,|\vec{r}|} = \frac{m_Z}{m_S} \approx \frac{6\times 10^{24}\ \mathrm{kg}}{2\times 10^{30}\ \mathrm{kg}} = 3\times 10^{-6}.$$

Pomińmy nieistotny dla ruchu względnego wektor $\vec{R}$ i obliczmy

$$\frac{|\vec{r_S}|}{|\vec{r_Z}|} = \frac{\left|\frac{m_Z}{m_S+m_Z}\vec{r}\right|}{\left|-\frac{m_S}{m_S+m_Z}\vec{r}\right|} = \frac{\frac{m_Z}{m_S+m_Z}\,|\vec{r}|}{\frac{m_S}{m_S+m_Z}\,|\vec{r}|} = \frac{m_Z}{m_S} \approx \frac{6\times 10^{24}\ \mathrm{kg}}{2\times 10^{30}\ \mathrm{kg}} = 3\times 10^{-6}.$$

Widzimy, że rozmiary orbit Słońca i Ziemi w ruchu względnym mają się do siebie jak

$$\frac{|\vec{r_S}|}{|\vec{r_Z}|} \approx 3\times 10^{-6},$$

Pomińmy nieistotny dla ruchu względnego wektor $\vec{R}$ i obliczmy

$$\frac{|\vec{r_S}|}{|\vec{r_Z}|} = \frac{\left|\frac{m_Z}{m_S+m_Z}\vec{r}\right|}{\left|-\frac{m_S}{m_S+m_Z}\vec{r}\right|} = \frac{\frac{m_Z}{m_S+m_Z}\,|\vec{r}|}{\frac{m_S}{m_S+m_Z}\,|\vec{r}|} = \frac{m_Z}{m_S} \approx \frac{6\times 10^{24}\ \mathrm{kg}}{2\times 10^{30}\ \mathrm{kg}} = 3\times 10^{-6}.$$

Widzimy, że rozmiary orbit Słońca i Ziemi w ruchu względnym mają się do siebie jak

$$\frac{|\vec{r_S}|}{|\vec{r_Z}|} \approx 3\times 10^{-6},$$

a zatem jeśli średnia odległość Ziemi od Słońca wynosi 150×10^6 km,

Pomińmy nieistotny dla ruchu względnego wektor $\vec{R}$ i obliczmy

$$\frac{|\vec{r_S}|}{|\vec{r_Z}|} = \frac{\left|\frac{m_Z}{m_S+m_Z}\vec{r}\right|}{\left|-\frac{m_S}{m_S+m_Z}\vec{r}\right|} = \frac{\frac{m_Z}{m_S+m_Z}\,|\vec{r}|}{\frac{m_S}{m_S+m_Z}\,|\vec{r}|} = \frac{m_Z}{m_S} \approx \frac{6\times 10^{24}\ \mathrm{kg}}{2\times 10^{30}\ \mathrm{kg}} = 3\times 10^{-6}.$$

Widzimy, że rozmiary orbit Słońca i Ziemi w ruchu względnym mają się do siebie jak

$$\frac{|\vec{r_S}|}{|\vec{r_Z}|} \approx 3\times 10^{-6},$$

a zatem jeśli średnia odległość Ziemi od Słońca wynosi 150×10^{6} km, to rozmiary orbity Słońca względem środka masy układu Słońce-Ziemia są rzędu 450 km.

Pomińmy nieistotny dla ruchu względnego wektor $\vec{R}$ i obliczmy

$$\frac{|\vec{r_S}|}{|\vec{r_Z}|} = \frac{\left|\frac{m_Z}{m_S+m_Z}\vec{r}\right|}{\left|-\frac{m_S}{m_S+m_Z}\vec{r}\right|} = \frac{\frac{m_Z}{m_S+m_Z}\,|\vec{r}|}{\frac{m_S}{m_S+m_Z}\,|\vec{r}|} = \frac{m_Z}{m_S} \approx \frac{6\times 10^{24}\ \mathrm{kg}}{2\times 10^{30}\ \mathrm{kg}} = 3\times 10^{-6}.$$

Widzimy, że rozmiary orbit Słońca i Ziemi w ruchu względnym mają się do siebie jak

$$\frac{|\vec{r_S}|}{|\vec{r_Z}|} \approx 3\times 10^{-6},$$

a zatem jeśli średnia odległość Ziemi od Słońca wynosi 150×10^{6} km, to rozmiary orbity Słońca względem środka masy układu Słońce-Ziemia są rzędu 450 km.

Widzimy, że orbita ta leży głęboko we wnętrzu Słońca.
Podobnie jest w przypadku względnego ruchu Słońca i każdej z pozostałych planet, nie wyłączając Jowisza.

Widzimy, że orbita ta leży głęboko we wnętrzu Słońca. Podobnie jest w przypadku względnego ruchu Słońca i każdej z pozostałych planet, nie wyłączając Jowisza.

Periodyczne zmiany położenia gwiazd spowodowane przez towarzyszące im planety są wykorzystywane do poszukiwania planet pozasłonecznych.

Widzimy, że orbita ta leży głęboko we wnętrzu Słońca.
Podobnie jest w przypadku względnego ruchu Słońca i każdej z pozostałych planet, nie wyłączając Jowisza.
Periodyczne zmiany położenia gwiazd spowodowane przez towarzyszące im planety są wykorzystywane do poszukiwania planet pozasłonecznych.
Jednak lepsze efekty przynosi badanie drobnych zmian jasności gwiazd spowodowane tranzytem planet na tle ich tarcz.

Widzimy, że orbita ta leży głęboko we wnętrzu Słońca.
Podobnie jest w przypadku względnego ruchu Słońca i każdej z pozostałych planet, nie wyłączając Jowisza.
Periodyczne zmiany położenia gwiazd spowodowane przez towarzyszące im planety są wykorzystywane do poszukiwania planet pozasłonecznych.
Jednak lepsze efekty przynosi badanie drobnych zmian jasności gwiazd spowodowane tranzytem planet na tle ich tarcz.

Siły centralne

W mechanice ważną rolę odgrywają siły centralne, czyli siły skierowane do określonego punktu, tzw. centrum siły.

W mechanice ważną rolę odgrywają siły centralne, czyli siły skierowane do określonego punktu, tzw. centrum siły.

Siłę centralną $F(\vec{r},t)$ możemy zapisać następująco

$$\vec{F}(\vec{r},t) = f(\vec{r},t)\,\frac{\vec{r}}{r}, \qquad \text{gdzie} \;\; r = |\vec{r}|\,,$$

W mechanice ważną rolę odgrywają siły centralne, czyli siły skierowane do określonego punktu, tzw. centrum siły.
Siłę centralną $F(\vec{r}, t)$ możemy zapisać następująco

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t)\,\frac{\vec{r}}{r}, \qquad \text{gdzie} \;\; r = |\vec{r}|\,,$$

a $f(\vec{r}, t)$ jest dowolną funkcją skalarną.

W mechanice ważną rolę odgrywają siły centralne, czyli siły skierowane do określonego punktu, tzw. centrum siły.
Siłę centralną $F(\vec{r}, t)$ możemy zapisać następująco

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t)\,\frac{\vec{r}}{r}, \qquad \text{gdzie} \;\; r = |\vec{r}|\,,$$

a $f(\vec{r}, t)$ jest dowolną funkcją skalarną.
Udowodnimy teraz kilka twierdzeń dotyczących ruchu ciała pod wpływem siły centralnej.

Siły centralne

W mechanice ważną rolę odgrywają siły centralne, czyli siły skierowane do określonego punktu, tzw. centrum siły.
Siłę centralną $F(\vec{r}, t)$ możemy zapisać następująco

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t)\,\frac{\vec{r}}{r}, \qquad \text{gdzie} \;\; r = |\vec{r}|\,,$$

a $f(\vec{r}, t)$ jest dowolną funkcją skalarną.
Udowodnimy teraz kilka twierdzeń dotyczących ruchu ciała pod wpływem siły centralnej.
Twierdzenie 1. Jeżeli ciało porusza się pod wpływem siły centralnej, to jego moment pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ względem centrum siły jest zachowany.

W mechanice ważną rolę odgrywają siły centralne, czyli siły skierowane do określonego punktu, tzw. centrum siły.
Siłę centralną $F(\vec{r}, t)$ możemy zapisać następująco

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t)\,\frac{\vec{r}}{r}, \qquad \text{gdzie } \; r = |\vec{r}|\,,$$

a $f(\vec{r}, t)$ jest dowolną funkcją skalarną.
Udowodnimy teraz kilka twierdzeń dotyczących ruchu ciała pod wpływem siły centralnej.
Twierdzenie 1. Jeżeli ciało porusza się pod wpływem siły centralnej, to jego moment pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ względem centrum siły jest zachowany.

Dowód. Obliczmy

$$\dot{\vec{L}} =$$

Dowód. Obliczmy

$$\dot{\vec{L}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}\right) =$$

Dowód. Obliczmy

$$\dot{\vec{L}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}\right) = m\underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_{0} + \vec{r} \times \underbrace{m\ddot{\vec{r}}}_{\vec{F}} =$$

Dowód. Obliczmy

$$\dot{\vec{L}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}\right) = m\underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_{0} + \vec{r} \times \underbrace{m\ddot{\vec{r}}}_{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F}\left(\vec{r}, t\right)$$

Dowód. Obliczmy

$$\dot{\vec{L}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}\right) = m\underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_{0} + \vec{r} \times \underbrace{m\ddot{\vec{r}}}_{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F}\,(\vec{r}, t)$$

$$=$$

Dowód. Obliczmy

$$\begin{aligned}\dot{\vec{L}} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r}\times m\dot{\vec{r}}\right) = m\underbrace{\dot{\vec{r}}\times\dot{\vec{r}}}_{0} + \vec{r}\times\underbrace{m\ddot{\vec{r}}}_{\vec{F}} = \vec{r}\times\vec{F}\left(\vec{r},t\right)\\ &= \vec{r}\times\left(f\left(\vec{r},t\right)\frac{\vec{r}}{r}\right)\end{aligned}$$

Dowód. Obliczmy

$$\dot{\vec{L}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}\right) = m\underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_{0} + \vec{r} \times \underbrace{m\ddot{\vec{r}}}_{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F}\left(\vec{r}, t\right)$$

$$= \vec{r} \times \left(f\left(\vec{r}, t\right)\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{f\left(\vec{r}, t\right)}{r}\underbrace{\vec{r} \times \vec{r}}_{0}$$

Dowód. Obliczmy

$$\begin{aligned}\dot{\vec{L}} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r}\times m\dot{\vec{r}}\right) = m\underbrace{\dot{\vec{r}}\times\dot{\vec{r}}}_{0} + \vec{r}\times\underbrace{m\ddot{\vec{r}}}_{\vec{F}} = \vec{r}\times\vec{F}\left(\vec{r},t\right)\\ &= \vec{r}\times\left(f\left(\vec{r},t\right)\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{f\left(\vec{r},t\right)}{r}\underbrace{\vec{r}\times\vec{r}}_{0} = 0\end{aligned}$$

Dowód. Obliczmy

$$\begin{aligned}\dot{\vec{L}} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r}\times m\dot{\vec{r}}\right) = m\underbrace{\dot{\vec{r}}\times\dot{\vec{r}}}_{0} + \vec{r}\times\underbrace{m\ddot{\vec{r}}}_{\vec{F}} = \vec{r}\times\vec{F}\left(\vec{r},t\right)\\ &= \vec{r}\times\left(f\left(\vec{r},t\right)\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{f\left(\vec{r},t\right)}{r}\underbrace{\vec{r}\times\vec{r}}_{0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \mathrm{const.}\end{aligned}$$

Dowód. Obliczmy

$$\begin{aligned}\dot{\vec{L}} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r}\times m\dot{\vec{r}}\right) = m\underbrace{\dot{\vec{r}}\times\dot{\vec{r}}}_{0} + \vec{r}\times\underbrace{m\ddot{\vec{r}}}_{\vec{F}} = \vec{r}\times\vec{F}\left(\vec{r},t\right) \\ &= \vec{r}\times\left(f\left(\vec{r},t\right)\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{f\left(\vec{r},t\right)}{r}\underbrace{\vec{r}\times\vec{r}}_{0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \mathrm{const.}\end{aligned}$$

Twierdzenie 2. Ruch ciała poruszającego się pod wpływem siły centralnej odbywa się w jednej płaszczyźnie prostopadłej do wektora jego momentu pędu $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$.

Dowód. Obliczmy

$$\begin{aligned}\dot{\vec{L}} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r}\times m\dot{\vec{r}}\right) = m\underbrace{\dot{\vec{r}}\times\dot{\vec{r}}}_{0} + \vec{r}\times\underbrace{m\ddot{\vec{r}}}_{\vec{F}} = \vec{r}\times\vec{F}\left(\vec{r},t\right)\\ &= \vec{r}\times\left(f\left(\vec{r},t\right)\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{f\left(\vec{r},t\right)}{r}\underbrace{\vec{r}\times\vec{r}}_{0} = 0 \quad\Rightarrow\quad \vec{L} = \mathrm{const.}\end{aligned}$$

Twierdzenie 2. Ruch ciała poruszającego się pod wpływem siły centralnej odbywa się w jednej płaszczyźnie prostopadłej do wektora jego momentu pędu $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$.

Dowód. Oznaczmy $\vec{r} = x_i\hat{e}_i$ i obliczmy iloczyn skalarny

$$\vec{r}\cdot\vec{L} =$$

Dowód. Obliczmy

$$\begin{aligned} \dot{\vec{L}} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}\right) = m\underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_{0} + \vec{r} \times \underbrace{m\ddot{\vec{r}}}_{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F}\left(\vec{r}, t\right) \\ &= \vec{r} \times \left(f\left(\vec{r}, t\right)\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{f\left(\vec{r}, t\right)}{r}\underbrace{\vec{r} \times \vec{r}}_{0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \mathrm{const.} \end{aligned}$$

Twierdzenie 2. Ruch ciała poruszającego się pod wpływem siły centralnej odbywa się w jednej płaszczyźnie prostopadłej do wektora jego momentu pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$.

Dowód. Oznaczmy $\vec{r} = x_i\hat{e}_i$ i obliczmy iloczyn skalarny

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = x_i L_i =$$

Dowód. Obliczmy

$$\dot{\vec{L}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}\right) = m\underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_{0} + \vec{r} \times \underbrace{m\ddot{\vec{r}}}_{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F}\left(\vec{r}, t\right)$$

$$= \vec{r} \times \left(f\left(\vec{r}, t\right)\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{f\left(\vec{r}, t\right)}{r}\underbrace{\vec{r} \times \vec{r}}_{0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \mathrm{const.}$$

Twierdzenie 2. Ruch ciała poruszającego się pod wpływem siły centralnej odbywa się w jednej płaszczyźnie prostopadłej do wektora jego momentu pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$.

Dowód. Oznaczmy $\vec{r} = x_i\hat{e}_i$ i obliczmy iloczyn skalarny

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = x_i L_i = x_i\left(\vec{r} \times \vec{p}\right)_i =$$

Dowód. Obliczmy

$$\begin{aligned}\dot{\vec{L}} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r}\times m\dot{\vec{r}}\right) = m\underbrace{\dot{\vec{r}}\times\dot{\vec{r}}}_{0} + \vec{r}\times\underbrace{m\ddot{\vec{r}}}_{\vec{F}} = \vec{r}\times\vec{F}\left(\vec{r},t\right) \\ &= \vec{r}\times\left(f\left(\vec{r},t\right)\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{f\left(\vec{r},t\right)}{r}\underbrace{\vec{r}\times\vec{r}}_{0} = 0 \quad\Rightarrow\quad \vec{L} = \mathrm{const.}\end{aligned}$$

Twierdzenie 2. Ruch ciała poruszającego się pod wpływem siły centralnej odbywa się w jednej płaszczyźnie prostopadłej do wektora jego momentu pędu $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$.

Dowód. Oznaczmy $\vec{r} = x_i\hat{e}_i$ i obliczmy iloczyn skalarny

$$\vec{r}\cdot\vec{L} = x_iL_i = x_i\left(\vec{r}\times\vec{p}\right)_i = x_i\varepsilon_{ijk}x_jp_k =$$

Dowód. Obliczmy

$$\begin{aligned}\dot{\vec{L}} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r}\times m\dot{\vec{r}}\right) = m\underbrace{\dot{\vec{r}}\times\dot{\vec{r}}}_{0} + \vec{r}\times\underbrace{m\ddot{\vec{r}}}_{\vec{F}} = \vec{r}\times\vec{F}\left(\vec{r},t\right) \\ &= \vec{r}\times\left(f\left(\vec{r},t\right)\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{f\left(\vec{r},t\right)}{r}\underbrace{\vec{r}\times\vec{r}}_{0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \mathrm{const.}\end{aligned}$$

Twierdzenie 2. Ruch ciała poruszającego się pod wpływem siły centralnej odbywa się w jednej płaszczyźnie prostopadłej do wektora jego momentu pędu $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$.

Dowód. Oznaczmy $\vec{r} = x_i\hat{e}_i$ i obliczmy iloczyn skalarny

$$\vec{r}\cdot\vec{L} = x_i L_i = x_i\left(\vec{r}\times\vec{p}\right)_i = x_i\varepsilon_{ijk}x_j p_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}x_i x_j p_k + \frac{1}{2}\varepsilon_{jik}x_j x_i p_k,$$

Dowód. Obliczmy

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{L}} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r}\times m\dot{\vec{r}}\right) = m\underbrace{\dot{\vec{r}}\times\dot{\vec{r}}}_{0} + \vec{r}\times\underbrace{m\ddot{\vec{r}}}_{\vec{F}} = \vec{r}\times\vec{F}\left(\vec{r},t\right) \\
&= \vec{r}\times\left(f\left(\vec{r},t\right)\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{f\left(\vec{r},t\right)}{r}\underbrace{\vec{r}\times\vec{r}}_{0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \text{const.}
\end{aligned}$$

Twierdzenie 2. Ruch ciała poruszającego się pod wpływem siły centralnej odbywa się w jednej płaszczyźnie prostopadłej do wektora jego momentu pędu $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$.

Dowód. Oznaczmy $\vec{r} = x_i\hat{e}_i$ i obliczmy iloczyn skalarny

$$\vec{r}\cdot\vec{L} = x_iL_i = x_i\left(\vec{r}\times\vec{p}\right)_i = x_i\varepsilon_{ijk}x_jp_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}x_ix_jp_k + \frac{1}{2}\varepsilon_{jik}x_jx_ip_k,$$

gdzie w ostatnim wyrazie zamieniliśmy nazwy wskaźników sumacyjnych $i \leftrightarrow j$. Przestawmy indeksy i i j korzystając z antysymetrii tensora ε_{ijk}

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} x_i x_j p_k - \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} x_i x_j p_k =$$

gdzie w ostatnim wyrazie zamieniliśmy nazwy wskaźników sumacyjnych $i \leftrightarrow j$. Przestawmy indeksy i i j korzystając z antysymetrii tensora ε_{ijk}

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} x_i x_j p_k - \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} x_i x_j p_k = 0$$

gdzie w ostatnim wyrazie zamieniliśmy nazwy wskaźników sumacyjnych $i \leftrightarrow j$. Przestawmy indeksy i i j korzystając z antysymetrii tensora ε_{ijk}

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} x_i x_j p_k - \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} x_i x_j p_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{r} \perp \vec{L}.$$

gdzie w ostatnim wyrazie zamieniliśmy nazwy wskaźników sumacyjnych $i \leftrightarrow j$. Przestawmy indeksy i i j korzystając z antysymetrii tensora ε_{ijk}

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} x_i x_j p_k - \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} x_i x_j p_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{r} \perp \vec{L}.$$

Twierdzenie 3. Pole siły centralnej $\vec{F}(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t)\frac{\vec{r}}{r}$ jest zachowawcze wtedy i tylko wtedy gdy $f(\vec{r}, t) = f(r, t)$.

gdzie w ostatnim wyrazie zamieniliśmy nazwy wskaźników sumacyjnych $i \leftrightarrow j$. Przestawmy indeksy i i j korzystając z antysymetrii tensora ε_{ijk}

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} x_i x_j p_k - \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} x_i x_j p_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{r} \perp \vec{L}.$$

Twierdzenie 3. Pole siły centralnej $\vec{F}(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t) \frac{\vec{r}}{r}$ jest zachowawcze wtedy i tylko wtedy gdy $f(\vec{r}, t) = f(r, t)$.

Dowód. Pole sił jest zachowawcze, gdy jego rotacja znika, tzn. $\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}, t) = 0$.

gdzie w ostatnim wyrazie zamieniliśmy nazwy wskaźników sumacyjnych $i \leftrightarrow j$. Przestawmy indeksy i i j korzystając z antysymetrii tensora ε_{ijk}

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} x_i x_j p_k - \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} x_i x_j p_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{r} \perp \vec{L}.$$

Twierdzenie 3. Pole siły centralnej $\vec{F}(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t)\frac{\vec{r}}{r}$ jest zachowawcze wtedy i tylko wtedy gdy $f(\vec{r}, t) = f(r, t)$.

Dowód. Pole sił jest zachowawcze, gdy jego rotacja znika, tzn. $\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}, t) = 0$. Obliczmy i-tą składową rotacji

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}, t)\right]_i =$$

gdzie w ostatnim wyrazie zamieniliśmy nazwy wskaźników sumacyjnych $i \leftrightarrow j$. Przestawmy indeksy i i j korzystając z antysymetrii tensora ε_{ijk}

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} x_i x_j p_k - \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} x_i x_j p_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{r} \perp \vec{L}.$$

Twierdzenie 3. Pole siły centralnej $\vec{F}(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t)\,\frac{\vec{r}}{r}$ jest zachowawcze wtedy i tylko wtedy gdy $f(\vec{r}, t) = f(r, t)$.

Dowód. Pole sił jest zachowawcze, gdy jego rotacja znika, tzn. $\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}, t) = 0$. Obliczmy i-tą składową rotacji

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}, t)\right]_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} F_k(\vec{r}, t) =$$

gdzie w ostatnim wyrazie zamieniliśmy nazwy wskaźników sumacyjnych $i \leftrightarrow j$. Przestawmy indeksy i i j korzystając z antysymetrii tensora ε_{ijk}

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} x_i x_j p_k - \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} x_i x_j p_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{r} \perp \vec{L}.$$

Twierdzenie 3. Pole siły centralnej $\vec{F}(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t)\frac{\vec{r}}{r}$ jest zachowawcze wtedy i tylko wtedy gdy $f(\vec{r}, t) = f(r, t)$.

Dowód. Pole sił jest zachowawcze, gdy jego rotacja znika, tzn. $\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}, t) = 0$. Obliczmy i-tą składową rotacji

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}, t)\right]_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j} F_k(\vec{r}, t) = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(f(\vec{r}, t)\frac{x_k}{r}\right).$$

gdzie w ostatnim wyrazie zamieniliśmy nazwy wskaźników sumacyjnych $i \leftrightarrow j$. Przestawmy indeksy i i j korzystając z antysymetrii tensora ε_{ijk}

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} x_i x_j p_k - \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} x_i x_j p_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{r} \perp \vec{L}.$$

Twierdzenie 3. Pole siły centralnej $\vec{F}(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t)\frac{\vec{r}}{r}$ jest zachowawcze wtedy i tylko wtedy gdy $f(\vec{r}, t) = f(r, t)$.

Dowód. Pole sił jest zachowawcze, gdy jego rotacja znika, tzn. $\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}, t) = 0$. Obliczmy i-tą składową rotacji

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}, t)\right]_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} F_k(\vec{r}, t) = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(f(\vec{r}, t) \frac{x_k}{r} \right).$$

Obliczmy pochodną iloczynu

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}, t)\right]_i =$$

Obliczmy pochodną iloczynu

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}, t)\right]_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{f(\vec{r}, t)}{r} \right) x_k + \frac{f(\vec{r}, t)}{r} \varepsilon_{ijk} \underbrace{\frac{\partial x_k}{\partial x_j}}_{\delta_{jk}} .$$

Obliczmy pochodną iloczynu

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}, t)\right]_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{f(\vec{r}, t)}{r} \right) x_k + \frac{f(\vec{r}, t)}{r} \varepsilon_{ijk} \underbrace{\frac{\partial x_k}{\partial x_j}}_{\delta_{jk}} .$$

Ostatni wyraz znika, gdyż ε_{ijk} jest niezerowy tylko jeśli wszystkie indeksy są różne, a wtedy z definicji $\delta_{jk} = 0$.

Siły centralne

Obliczmy pochodną iloczynu

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}, t)\right]_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{f(\vec{r}, t)}{r} \right) x_k + \frac{f(\vec{r}, t)}{r} \varepsilon_{ijk} \underbrace{\frac{\partial x_k}{\partial x_j}}_{\delta_{jk}} .$$

Ostatni wyraz znika, gdyż ε_{ijk} jest niezerowy tylko jeśli wszystkie indeksy są różne, a wtedy z definicji $\delta_{jk} = 0$.
W takim razie

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}, t)\right]_i =$$

Obliczmy pochodną iloczynu

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}, t)\right]_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{f(\vec{r}, t)}{r} \right) x_k + \frac{f(\vec{r}, t)}{r} \varepsilon_{ijk} \underbrace{\frac{\partial x_k}{\partial x_j}}_{\delta_{jk}} .$$

Ostatni wyraz znika, gdyż ε_{ijk} jest niezerowy tylko jeśli wszystkie indeksy są różne, a wtedy z definicji $\delta_{jk} = 0$.
W takim razie

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}, t)\right]_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{f(\vec{r}, t)}{r} \right) x_k =$$

Obliczmy pochodną iloczynu

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r},t)\right]_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{f(\vec{r},t)}{r} \right) x_k + \frac{f(\vec{r},t)}{r} \varepsilon_{ijk} \underbrace{\frac{\partial x_k}{\partial x_j}}_{\delta_{jk}} .$$

Ostatni wyraz znika, gdyż ε_{ijk} jest niezerowy tylko jeśli wszystkie indeksy są różne, a wtedy z definicji $\delta_{jk} = 0$.
W takim razie

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r},t)\right]_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{f(\vec{r},t)}{r} \right) x_k = \varepsilon_{ijk} \left[\vec{\nabla} \left(\frac{f(\vec{r},t)}{r} \right) \right]_j x_k$$

Obliczmy pochodną iloczynu

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r},t)\right]_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{f(\vec{r},t)}{r}\right)x_k + \frac{f(\vec{r},t)}{r}\varepsilon_{ijk}\underbrace{\frac{\partial x_k}{\partial x_j}}_{\delta_{jk}}.$$

Ostatni wyraz znika, gdyż ε_{ijk} jest niezerowy tylko jeśli wszystkie indeksy są różne, a wtedy z definicji $\delta_{jk} = 0$.
W takim razie

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r},t)\right]_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{f(\vec{r},t)}{r}\right)x_k = \varepsilon_{ijk}\left[\vec{\nabla}\left(\frac{f(\vec{r},t)}{r}\right)\right]_j x_k$$

$$=$$

Obliczmy pochodną iloczynu

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}, t)\right]_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{f(\vec{r}, t)}{r} \right) x_k + \frac{f(\vec{r}, t)}{r} \varepsilon_{ijk} \underbrace{\frac{\partial x_k}{\partial x_j}}_{\delta_{jk}} .$$

Ostatni wyraz znika, gdyż ε_{ijk} jest niezerowy tylko jeśli wszystkie indeksy są różne, a wtedy z definicji $\delta_{jk} = 0$.
W takim razie

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}, t)\right]_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{f(\vec{r}, t)}{r} \right) x_k = \varepsilon_{ijk} \left[\vec{\nabla} \left(\frac{f(\vec{r}, t)}{r} \right)\right]_j x_k$$

$$= \left[\vec{\nabla} \left(\frac{f(\vec{r}, t)}{r} \right) \times \vec{r}\right]_i =$$

Obliczmy pochodną iloczynu

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r},t)\right]_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{f(\vec{r},t)}{r}\right) x_k + \frac{f(\vec{r},t)}{r} \varepsilon_{ijk} \underbrace{\frac{\partial x_k}{\partial x_j}}_{\delta_{jk}} .$$

Ostatni wyraz znika, gdyż ε_{ijk} jest niezerowy tylko jeśli wszystkie indeksy są różne, a wtedy z definicji $\delta_{jk} = 0$.
W takim razie

$$\begin{aligned}\left[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r},t)\right]_i &= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{f(\vec{r},t)}{r}\right) x_k = \varepsilon_{ijk}\left[\vec{\nabla}\left(\frac{f(\vec{r},t)}{r}\right)\right]_j x_k \\ &= \left[\vec{\nabla}\left(\frac{f(\vec{r},t)}{r}\right) \times \vec{r}\right]_i = 0.\end{aligned}$$

Siły centralne

Obliczmy pochodną iloczynu

$$\left[\vec{\nabla}\times\vec{F}\left(\vec{r},t\right)\right]_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{f\left(\vec{r},t\right)}{r}\right)x_k + \frac{f\left(\vec{r},t\right)}{r}\varepsilon_{ijk}\underbrace{\frac{\partial x_k}{\partial x_j}}_{\delta_{jk}}.$$

Ostatni wyraz znika, gdyż ε_{ijk} jest niezerowy tylko jeśli wszystkie indeksy są różne, a wtedy z definicji $\delta_{jk} = 0$.
W takim razie

$$\begin{aligned}\left[\vec{\nabla}\times\vec{F}\left(\vec{r},t\right)\right]_i &= \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{f\left(\vec{r},t\right)}{r}\right)x_k = \varepsilon_{ijk}\left[\vec{\nabla}\left(\frac{f\left(\vec{r},t\right)}{r}\right)\right]_j x_k \\ &= \left[\vec{\nabla}\left(\frac{f\left(\vec{r},t\right)}{r}\right)\times\vec{r}\right]_i = 0.\end{aligned}$$

Ostatnia równość oznacza, że

$$\vec{\nabla}\left(\frac{f\left(\vec{r},t\right)}{r}\right)\sim\vec{r}.$$

Ponieważ gradient funkcji $f\left(\vec{r},t\right)$ nie ma składowych w kierunku kątów θ i φ, to musi zachodzić równość

$$f\left(\vec{r},t\right)=f\left(r,t\right).$$

Ostatnia równość oznacza, że

$$\vec{\nabla}\left(\frac{f\left(\vec{r},t\right)}{r}\right)\sim\vec{r}.$$

Ponieważ gradient funkcji $f\left(\vec{r},t\right)$ nie ma składowych w kierunku kątów θ i φ, to musi zachodzić równość

$$f\left(\vec{r},t\right)=f\left(r,t\right).$$

To oznacza, że potencjał, a ściślej energia potencjalna, siły centralnej może zależeć tylko od odległości od centrum siły

$$V(\vec{r},t)=V(r,t).$$

Ostatnia równość oznacza, że

$$\vec{\nabla}\left(\frac{f\left(\vec{r},t\right)}{r}\right) \sim \vec{r}.$$

Ponieważ gradient funkcji $f\left(\vec{r},t\right)$ nie ma składowych w kierunku kątów θ i φ, to musi zachodzić równość

$$f\left(\vec{r},t\right) = f\left(r,t\right).$$

To oznacza, że potencjał, a ściślej energia potencjalna, siły centralnej może zależeć tylko od odległości od centrum siły

$$V(\vec{r},t) = V(r,t).$$

W dalszym ciągu ograniczymy się do stacjonarnych, tzn. niezależnych jawnie od czasu, sił centralnych postaci

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\frac{\vec{r}}{r},$$

dla których energia potencjalna $V(r)$ wiąże się z siłą wzorem

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}\,\frac{\vec{r}}{r}.$$

W dalszym ciągu ograniczymy się do stacjonarnych, tzn. niezależnych jawnie od czasu, sił centralnych postaci

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\frac{\vec{r}}{r},$$

dla których energia potencjalna $V(r)$ wiąże się z siłą wzorem

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}\,\frac{\vec{r}}{r}.$$

Ponieważ siła grawitacyjna jest centralna i stacjonarna,

Siły centralne

W dalszym ciągu ograniczymy się do stacjonarnych, tzn. niezależnych jawnie od czasu, sił centralnych postaci

$$\vec{F}\left(\vec{r}\right) = f\left(r\right)\frac{\vec{r}}{r},$$

dla których energia potencjalna $V(r)$ wiąże się z siłą wzorem

$$\vec{F}\left(\vec{r}\right) = -\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}\,\frac{\vec{r}}{r}.$$

Ponieważ siła grawitacyjna jest centralna i stacjonarna, to możemy rozpatrywać ruch ciała o masie zredukowanej m w polu siły o energii potencjalnej $V(r)$, której źródłem jest drugie ciało.

W dalszym ciągu ograniczymy się do stacjonarnych, tzn. niezależnych jawnie od czasu, sił centralnych postaci

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\frac{\vec{r}}{r},$$

dla których energia potencjalna $V(r)$ wiąże się z siłą wzorem

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}\,\frac{\vec{r}}{r}.$$

Ponieważ siła grawitacyjna jest centralna i stacjonarna, to możemy rozpatrywać ruch ciała o masie zredukowanej m w polu siły o energii potencjalnej $V(r)$, której źródłem jest drugie ciało.

Ruch w polu siły centralnej

Jak pokazaliśmy, taki ruch będzie się odbywał w płaszczyźnie prostopadłej do orbitalnego momentu pędu.

Funkcja Lagrange'a ma w tym przypadku postać

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^{\,2} - V(r)$$

Jak pokazaliśmy, taki ruch będzie się odbywał w płaszczyźnie prostopadłej do orbitalnego momentu pędu.
Funkcja Lagrange'a ma w tym przypadku postać

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^{\,2} - V(r) = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \right) - V(r).$$

Jak pokazaliśmy, taki ruch będzie się odbywał w płaszczyźnie prostopadłej do orbitalnego momentu pędu.
Funkcja Lagrange'a ma w tym przypadku postać

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^{\,2} - V(r) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - V(r).$$

Ze względu na symetrię obrotową użyjemy współrzędnych biegunowych

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & r\cos\varphi, \\ y & = & r\sin\varphi \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \\ \end{array}\right.$$

Jak pokazaliśmy, taki ruch będzie się odbywał w płaszczyźnie prostopadłej do orbitalnego momentu pędu.
Funkcja Lagrange'a ma w tym przypadku postać

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^{\,2} - V(r) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - V(r).$$

Ze względu na symetrię obrotową użyjemy współrzędnych biegunowych

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} \\ \end{cases}$$

Jak pokazaliśmy, taki ruch będzie się odbywał w płaszczyźnie prostopadłej do orbitalnego momentu pędu.
Funkcja Lagrange'a ma w tym przypadku postać

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^{\,2} - V(r) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - V(r).$$

Ze względu na symetrię obrotową użyjemy współrzędnych biegunowych

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \\ \end{cases}$$

Jak pokazaliśmy, taki ruch będzie się odbywał w płaszczyźnie prostopadłej do orbitalnego momentu pędu.
Funkcja Lagrange'a ma w tym przypadku postać

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^{\,2} - V(r) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - V(r).$$

Ze względu na symetrię obrotową użyjemy współrzędnych biegunowych

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi, \\ \end{cases}$$

Jak pokazaliśmy, taki ruch będzie się odbywał w płaszczyźnie prostopadłej do orbitalnego momentu pędu.
Funkcja Lagrange'a ma w tym przypadku postać

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^{\,2} - V(r) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - V(r).$$

Ze względu na symetrię obrotową użyjemy współrzędnych biegunowych

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi, \\ \dot{y} \end{cases}$$

Jak pokazaliśmy, taki ruch będzie się odbywał w płaszczyźnie prostopadłej do orbitalnego momentu pędu.
Funkcja Lagrange'a ma w tym przypadku postać

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^{\,2} - V(r) = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \right) - V(r).$$

Ze względu na symetrię obrotową użyjemy współrzędnych biegunowych

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & r\cos\varphi, \\ y & = & r\sin\varphi \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x} & = & \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi, \\ \dot{y} & = & \end{array} \right.$$

Jak pokazaliśmy, taki ruch będzie się odbywał w płaszczyźnie prostopadłej do orbitalnego momentu pędu.
Funkcja Lagrange'a ma w tym przypadku postać

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^{\,2} - V(r) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - V(r).$$

Ze względu na symetrię obrotową użyjemy współrzędnych biegunowych

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & r\cos\varphi, \\ y & = & r\sin\varphi \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcl} \dot{x} & = & \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi, \\ \dot{y} & = & \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi. \end{array}\right.$$

Ruch w polu siły centralnej

Jak pokazaliśmy, taki ruch będzie się odbywał w płaszczyźnie prostopadłej do orbitalnego momentu pędu.
Funkcja Lagrange'a ma w tym przypadku postać

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^{\,2} - V(r) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - V(r).$$

Ze względu na symetrię obrotową użyjemy współrzędnych biegunowych

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & r\cos\varphi, \\ y & = & r\sin\varphi \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcl} \dot{x} & = & \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi, \\ \dot{y} & = & \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi. \end{array}\right.$$

Wstawiając wzory na $\dot{x}$ i $\dot{y}$ do L otrzymujemy

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - V(r).$$

Jak pokazaliśmy, taki ruch będzie się odbywał w płaszczyźnie prostopadłej do orbitalnego momentu pędu.
Funkcja Lagrange'a ma w tym przypadku postać

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^{\,2} - V(r) = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \right) - V(r).$$

Ze względu na symetrię obrotową użyjemy współrzędnych biegunowych

$$\begin{cases} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x} &= \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi, \\ \dot{y} &= \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi. \end{cases}$$

Wstawiając wzory na $\dot{x}$ i $\dot{y}$ do L otrzymujemy

$$L = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \right) - V(r).$$

Zauważmy, że funkcja Lagrange'a

$$L = T - V = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - V(r)$$

nie zależy jawnie od czasu.

Stąd wynika, że całkowita energia ciała jest zachowana,

Zauważmy, że funkcja Lagrange'a

$$L = T - V = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - V(r)$$

nie zależy jawnie od czasu.
Stąd wynika, że całkowita energia ciała jest zachowana, a więc

$$E = T + V$$

Zauważmy, że funkcja Lagrange'a

$$L = T - V = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - V(r)$$

nie zależy jawnie od czasu.
Stąd wynika, że całkowita energia ciała jest zachowana, a więc

$$E = T + V = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + V(r)$$

Zauważmy, że funkcja Lagrange'a

$$L = T - V = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - V(r)$$

nie zależy jawnie od czasu.
Stąd wynika, że całkowita energia ciała jest zachowana, a więc

$$E = T + V = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + V(r) = \mathrm{const.}$$

Zauważmy, że funkcja Lagrange'a

$$L = T - V = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - V(r)$$

nie zależy jawnie od czasu.
Stąd wynika, że całkowita energia ciała jest zachowana, a więc

$$E = T + V = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + V(r) = \mathrm{const.}$$

Ponadto zauważmy, że φ jest współrzędną cykliczną, tzn. że odpowiedni pęd jest zachowany:

Zauważmy, że funkcja Lagrange'a

$$L = T - V = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - V(r)$$

nie zależy jawnie od czasu.
Stąd wynika, że całkowita energia ciała jest zachowana, a więc

$$E = T + V = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + V(r) = \mathrm{const.}$$

Ponadto zauważmy, że φ jest współrzędną cykliczną, tzn. że odpowiedni pęd jest zachowany:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

Zauważmy, że funkcja Lagrange'a

$$L = T - V = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - V(r)$$

nie zależy jawnie od czasu.
Stąd wynika, że całkowita energia ciała jest zachowana, a więc

$$E = T + V = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + V(r) = \mathrm{const.}$$

Ponadto zauważmy, że φ jest współrzędną cykliczną, tzn. że odpowiedni pęd jest zachowany:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} =$$

Zauważmy, że funkcja Lagrange'a

$$L = T - V = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - V(r)$$

nie zależy jawnie od czasu.
Stąd wynika, że całkowita energia ciała jest zachowana, a więc

$$E = T + V = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + V(r) = \mathrm{const.}$$

Ponadto zauważmy, że φ jest współrzędną cykliczną, tzn. że odpowiedni pęd jest zachowany:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\mathrm{d}p_\varphi}{\mathrm{d}t} = 0$$

Zauważmy, że funkcja Lagrange'a

$$L = T - V = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - V(r)$$

nie zależy jawnie od czasu.
Stąd wynika, że całkowita energia ciała jest zachowana, a więc

$$E = T + V = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + V(r) = \mathrm{const.}$$

Ponadto zauważmy, że φ jest współrzędną cykliczną, tzn. że odpowiedni pęd jest zachowany:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\mathrm{d}p_\varphi}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}$$

Zauważmy, że funkcja Lagrange'a

$$L = T - V = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - V(r)$$

nie zależy jawnie od czasu.
Stąd wynika, że całkowita energia ciała jest zachowana, a więc

$$E = T + V = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + V(r) = \mathrm{const.}$$

Ponadto zauważmy, że φ jest współrzędną cykliczną, tzn. że odpowiedni pęd jest zachowany:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\mathrm{d}p_\varphi}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}$$

Zauważmy, że funkcja Lagrange'a

$$L = T - V = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - V(r)$$

nie zależy jawnie od czasu.
Stąd wynika, że całkowita energia ciała jest zachowana, a więc

$$E = T + V = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + V(r) = \mathrm{const.}$$

Ponadto zauważmy, że φ jest współrzędną cykliczną, tzn. że odpowiedni pęd jest zachowany:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\mathrm{d}p_\varphi}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = \mathrm{const.}$$

Zauważmy, że funkcja Lagrange'a

$$L = T - V = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - V(r)$$

nie zależy jawnie od czasu.
Stąd wynika, że całkowita energia ciała jest zachowana, a więc

$$E = T + V = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + V(r) = \mathrm{const.}$$

Ponadto zauważmy, że φ jest współrzędną cykliczną, tzn. że odpowiedni pęd jest zachowany:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\mathrm{d}p_\varphi}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = \mathrm{const.}$$

Zauważmy, że pęd p_φ jest składową momentu pędu ciała względem centrum siły, prostopadłą do płaszczyzny, w której odbywa się ruch. Rzeczywiście

$$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}$$

Zauważmy, że pęd p_φ jest składową momentu pędu ciała względem centrum siły, prostopadłą do płaszczyzny, w której odbywa się ruch. Rzeczywiście

$$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} = rmr\dot{\varphi}$$

Zauważmy, że pęd p_φ jest składową momentu pędu ciała względem centrum siły, prostopadłą do płaszczyzny, w której odbywa się ruch. Rzeczywiście

$$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} = rmr\dot{\varphi} = rmv$$

Zauważmy, że pęd p_φ jest składową momentu pędu ciała względem centrum siły, prostopadłą do płaszczyzny, w której odbywa się ruch. Rzeczywiście

$$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} = rmr\dot{\varphi} = rmv = |\vec{r} \times \vec{p}|,$$

Zauważmy, że pęd p_φ jest składową momentu pędu ciała względem centrum siły, prostopadłą do płaszczyzny, w której odbywa się ruch. Rzeczywiście

$$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} = rmr\dot{\varphi} = rmv = |\vec{r} \times \vec{p}|,$$

gdzie $v = r\dot{\varphi}$ jest prędkością liniową w ruchu obrotowym ciała względem centrum siły.

Ruch w polu siły centralnej

Zauważmy, że pęd p_φ jest składową momentu pędu ciała względem centrum siły, prostopadłą do płaszczyzny, w której odbywa się ruch. Rzeczywiście

$$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} = rmr\dot{\varphi} = rmv = |\vec{r} \times \vec{p}|,$$

gdzie $v = r\dot{\varphi}$ jest prędkością liniową w ruchu obrotowym ciała względem centrum siły.

Przekształćmy wzór na p_φ.

$$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}$$

Zauważmy, że pęd p_φ jest składową momentu pędu ciała względem centrum siły, prostopadłą do płaszczyzny, w której odbywa się ruch. Rzeczywiście

$$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} = rmr\dot{\varphi} = rmv = |\vec{r} \times \vec{p}|,$$

gdzie $v = r\dot{\varphi}$ jest prędkością liniową w ruchu obrotowym ciała względem centrum siły.
Przekształćmy wzór na p_φ.

$$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{p_\varphi}{mr^2}$$

Ruch w polu siły centralnej

Zauważmy, że pęd p_φ jest składową momentu pędu ciała względem centrum siły, prostopadłą do płaszczyzny, w której odbywa się ruch. Rzeczywiście

$$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} = rmr\dot{\varphi} = rmv = |\vec{r} \times \vec{p}|,$$

gdzie $v = r\dot{\varphi}$ jest prędkością liniową w ruchu obrotowym ciała względem centrum siły.
Przekształćmy wzór na p_φ.

$$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{p_\varphi}{mr^2} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}t = \frac{mr^2}{p_\varphi}\,\mathrm{d}\varphi.$$

Zauważmy, że pęd p_φ jest składową momentu pędu ciała względem centrum siły, prostopadłą do płaszczyzny, w której odbywa się ruch. Rzeczywiście

$$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} = rmr\dot{\varphi} = rmv = |\vec{r} \times \vec{p}|,$$

gdzie $v = r\dot{\varphi}$ jest prędkością liniową w ruchu obrotowym ciała względem centrum siły.
Przekształćmy wzór na p_φ.

$$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{p_\varphi}{mr^2} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}t = \frac{mr^2}{p_\varphi}\,\mathrm{d}\varphi.$$

Wstawiając wyrażenie $\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}$ do wzoru na energię ciała

$$E = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + V(r)$$

otrzymujemy

$$\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{p_\varphi^2}{m^2 r^2}\right) = E - V(r)$$

Ruch w polu siły centralnej

Wstawiając wyrażenie $\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}$ do wzoru na energię ciała

$$E = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + V(r)$$

otrzymujemy

$$\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{p_\varphi^2}{m^2 r^2}\right) = E - V(r) \quad \Rightarrow \quad \dot{r}^2 = \frac{1}{m^2}\left[2m(E - V(r)) - \frac{p_\varphi^2}{r^2}\right].$$

Ruch w polu siły centralnej

Wstawiając wyrażenie $\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}$ do wzoru na energię ciała

$$E = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + V(r)$$

otrzymujemy

$$\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{p_\varphi^2}{m^2 r^2}\right) = E - V(r) \quad \Rightarrow \quad \dot{r}^2 = \frac{1}{m^2}\left[2m(E - V(r)) - \frac{p_\varphi^2}{r^2}\right].$$

Skąd również możemy wyznaczyć $\mathrm{d}t$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \pm\frac{1}{m}\sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{p_\varphi^2}{r^2}}$$

Ruch w polu siły centralnej

Wstawiając wyrażenie $\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}$ do wzoru na energię ciała

$$E = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + V(r)$$

otrzymujemy

$$\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{p_\varphi^2}{m^2 r^2}\right) = E - V(r) \quad \Rightarrow \quad \dot{r}^2 = \frac{1}{m^2}\left[2m(E - V(r)) - \frac{p_\varphi^2}{r^2}\right].$$

Skąd również możemy wyznaczyć $\mathrm{d}t$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \pm\frac{1}{m}\sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{p_\varphi^2}{r^2}} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}t = \pm\frac{m\mathrm{d}r}{\sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{p_\varphi^2}{r^2}}}.$$

Wstawiając wyrażenie $\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}$ do wzoru na energię ciała

$$E = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + V(r)$$

otrzymujemy

$$\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{p_\varphi^2}{m^2 r^2}\right) = E - V(r) \quad \Rightarrow \quad \dot{r}^2 = \frac{1}{m^2}\left[2m(E - V(r)) - \frac{p_\varphi^2}{r^2}\right].$$

Skąd również możemy wyznaczyć $\mathrm{d}t$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \pm\frac{1}{m}\sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{p_\varphi^2}{r^2}} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}t = \pm\frac{m\mathrm{d}r}{\sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{p_\varphi^2}{r^2}}}.$$

Otrzymaliśmy dwa wzory na $\mathrm{d}t$:

$$\mathrm{d}t = \frac{mr^2}{p_\varphi}\,\mathrm{d}\varphi \quad \text{i} \quad \mathrm{d}t = \pm\frac{m\mathrm{d}r}{\sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{p_\varphi^2}{r^2}}}.$$

Otrzymaliśmy dwa wzory na $\mathrm{d}t$:

$$\mathrm{d}t = \frac{mr^2}{p_\varphi}\,\mathrm{d}\varphi \quad \text{i} \quad \mathrm{d}t = \pm\frac{m\mathrm{d}r}{\sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{p_\varphi^2}{r^2}}}.$$

Porównajmy oba wzory

$$\frac{mr^2}{p_\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = \pm\frac{m\mathrm{d}r}{\sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{p_\varphi^2}{r^2}}}.$$

Otrzymaliśmy dwa wzory na $\mathrm{d}t$:

$$\mathrm{d}t = \frac{mr^2}{p_\varphi}\,\mathrm{d}\varphi \quad \text{i} \quad \mathrm{d}t = \pm\frac{m\mathrm{d}r}{\sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{p_\varphi^2}{r^2}}}.$$

Porównajmy oba wzory

$$\frac{mr^2}{p_\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = \pm\frac{m\mathrm{d}r}{\sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{p_\varphi^2}{r^2}}}.$$

Stąd możemy wyznaczyć $\mathrm{d}\varphi$

$$\mathrm{d}\varphi \;=\; \pm p_\varphi \frac{\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{2m\,(E - V(r)) - \frac{p_\varphi^2}{r^2}}}.$$

Otrzymaliśmy dwa wzory na $\mathrm{d}t$:

$$\mathrm{d}t = \frac{mr^2}{p_\varphi}\,\mathrm{d}\varphi \quad \mathrm{i} \quad \mathrm{d}t = \pm\frac{m\mathrm{d}r}{\sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{p_\varphi^2}{r^2}}}.$$

Porównajmy oba wzory

$$\frac{mr^2}{p_\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = \pm\frac{m\mathrm{d}r}{\sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{p_\varphi^2}{r^2}}}.$$

Stąd możemy wyznaczyć $\mathrm{d}\varphi$

$$\mathrm{d}\varphi \;=\; \pm p_\varphi \frac{\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{2m\,(E - V(r)) - \frac{p_\varphi^2}{r^2}}}.$$

Całkując obustronnie równanie

$$\mathrm{d}\varphi = \pm p_\varphi \frac{\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{2m\left(E - V(r)\right) - \frac{p_\varphi^2}{r^2}}}$$

dostaniemy

$$\varphi = \pm \int \frac{p_\varphi \,\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{2m\left(E - V(r)\right) - \frac{p_\varphi^2}{r^2}}} ,$$

Całkując obustronnie równanie

$$\mathrm{d}\varphi = \pm p_\varphi \frac{\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{2m\left(E - V(r)\right) - \frac{p_\varphi^2}{r^2}}}$$

dostaniemy

$$\varphi = \pm \int \frac{p_\varphi \,\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{2m\left(E - V(r)\right) - \frac{p_\varphi^2}{r^2}}},$$

gdzie celowo nie wyłączyliśmy stałego czynnika p_φ przed całkę.

Całkując obustronnie równanie

$$\mathrm{d}\varphi = \pm p_\varphi \frac{\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{2m\left(E - V(r)\right) - \frac{p_\varphi^2}{r^2}}}$$

dostaniemy

$$\varphi = \pm \int \frac{p_\varphi \, \mathrm{d}r}{r^2\sqrt{2m\left(E - V(r)\right) - \frac{p_\varphi^2}{r^2}}} \,,$$

gdzie celowo nie wyłączyliśmy stałego czynnika p_φ przed całkę. Żeby wykonać całkowanie musimy wstawić jawną postać funkcji $V(r)$.

Całkując obustronnie równanie

$$\mathrm{d}\varphi = \pm p_\varphi \frac{\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{2m\left(E - V(r)\right) - \frac{p_\varphi^2}{r^2}}}$$

dostaniemy

$$\varphi = \pm \int \frac{p_\varphi \, \mathrm{d}r}{r^2\sqrt{2m\left(E - V(r)\right) - \frac{p_\varphi^2}{r^2}}} \,,$$

gdzie celowo nie wyłączyliśmy stałego czynnika p_φ przed całkę. Żeby wykonać całkowanie musimy wstawić jawną postać funkcji $V(r)$.

Od czasów Newtona wiemy, że energia potencjalna oddziaływania dwóch ciał o masach m_1 i m_2 wynosi

$$V(r) = -G\,\frac{m_1 m_2}{r},$$

ale Johannes Kepler (1571–1630), który sformułował prawa ruchu planet, nie znał prawa powszechnego ciążenia Newtona.

Od czasów Newtona wiemy, że energia potencjalna oddziaływania dwóch ciał o masach m_1 i m_2 wynosi

$$V(r) = -G\,\frac{m_1 m_2}{r},$$

ale Johannes Kepler (1571–1630), który sformułował prawa ruchu planet, nie znał prawa powszechnego ciążenia Newtona.
Dlatego przyjął

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r},$$

Od czasów Newtona wiemy, że energia potencjalna oddziaływania dwóch ciał o masach m_1 i m_2 wynosi

$$V(r) = -G\,\frac{m_1 m_2}{r},$$

ale Johannes Kepler (1571–1630), który sformułował prawa ruchu planet, nie znał prawa powszechnego ciążenia Newtona.
Dlatego przyjął

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}, \qquad \text{gdzie} \quad \alpha = \text{const.} > 0.$$

Ruch w polu siły centralnej

Od czasów Newtona wiemy, że energia potencjalna oddziaływania dwóch ciał o masach m_1 i m_2 wynosi

$$V(r) = -G\,\frac{m_1 m_2}{r},$$

ale Johannes Kepler (1571–1630), który sformułował prawa ruchu planet, nie znał prawa powszechnego ciążenia Newtona.
Dlatego przyjął

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}, \qquad \text{gdzie} \quad \alpha = \text{const.} > 0.$$

Wstawiając potencjał Keplera do naszej całki otrzymamy

$$\varphi = \pm \int \frac{p_\varphi\,\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{2mE + \frac{2m\alpha}{r} - \frac{p_\varphi^2}{r^2}}}.$$

Od czasów Newtona wiemy, że energia potencjalna oddziaływania dwóch ciał o masach m_1 i m_2 wynosi

$$V(r) = -G\,\frac{m_1 m_2}{r},$$

ale Johannes Kepler (1571–1630), który sformułował prawa ruchu planet, nie znał prawa powszechnego ciążenia Newtona.
Dlatego przyjął

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}, \qquad \text{gdzie} \quad \alpha = \mathrm{const.} > 0.$$

Wstawiając potencjał Keplera do naszej całki otrzymamy

$$\varphi = \pm \int \frac{p_\varphi \,\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{2mE + \frac{2m\alpha}{r} - \frac{p_\varphi^2}{r^2}}}\,.$$

Wciągnijmy stałą p_φ pod pierwiastek

$$\varphi = \pm \int \frac{\mathrm{d}r}{r^2 \sqrt{\frac{2mE}{p_\varphi^2} + \frac{2m\alpha}{p_\varphi^2 r} - \frac{1}{r^2}}}$$

i podstawmy

$$u = \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}u = -\frac{\mathrm{d}r}{r^2},$$

Wciągnijmy stałą p_φ pod pierwiastek

$$\varphi = \pm \int \frac{\mathrm{d}r}{r^2 \sqrt{\frac{2mE}{p_\varphi^2} + \frac{2m\alpha}{p_\varphi^2 r} - \frac{1}{r^2}}}$$

i podstawmy

$$u = \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}u = -\frac{\mathrm{d}r}{r^2},$$

wtedy dostaniemy

$$\varphi = \mp \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\frac{2mE}{p_\varphi^2} + \frac{2m\alpha}{p_\varphi^2}\, u - u^2}} .$$

Wciągnijmy stałą p_φ pod pierwiastek

$$\varphi = \pm \int \frac{\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{\frac{2mE}{p_\varphi^2} + \frac{2m\alpha}{p_\varphi^2 r} - \frac{1}{r^2}}}$$

i podstawmy

$$u = \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}u = -\frac{\mathrm{d}r}{r^2},$$

wtedy dostaniemy

$$\varphi = \mp \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\frac{2mE}{p_\varphi^2} + \frac{2m\alpha}{p_\varphi^2}\, u - u^2}}\,.$$

Sprowadźmy trójmian kwadratowy pod pierwiastkiem do postaci kanonicznej

$$\varphi = \mp\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\frac{2mE}{p_\varphi^2} + 2\frac{m\alpha}{p_\varphi^2}\, u - u^2}} = \mp\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\frac{2mE}{p_\varphi^2} + \frac{m^2\alpha^2}{p_\varphi^4} - \left(u - \frac{m\alpha}{p_\varphi^2}\right)^2}}$$

Sprowadźmy trójmian kwadratowy pod pierwiastkiem do postaci kanonicznej

$$\varphi = \mp \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\frac{2mE}{p_\varphi^2} + 2\frac{m\alpha}{p_\varphi^2}\, u - u^2}} = \mp \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\frac{2mE}{p_\varphi^2} + \frac{m^2\alpha^2}{p_\varphi^4} - \left(u - \frac{m\alpha}{p_\varphi^2}\right)^2}}$$

$$=$$

Sprowadźmy trójmian kwadratowy pod pierwiastkiem do postaci kanonicznej

$$\varphi = \mp\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\frac{2mE}{p_\varphi^2} + 2\frac{m\alpha}{p_\varphi^2}\,u - u^2}} = \mp\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\frac{2mE}{p_\varphi^2} + \frac{m^2\alpha^2}{p_\varphi^4} - \left(u - \frac{m\alpha}{p_\varphi^2}\right)^2}}$$

$$= \mp\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\frac{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}{p_\varphi^4} - \left(u - \frac{m\alpha}{p_\varphi^2}\right)^2}}$$

Sprowadźmy trójmian kwadratowy pod pierwiastkiem do postaci kanonicznej

$$\varphi = \mp \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\frac{2mE}{p_\varphi^2} + 2\frac{m\alpha}{p_\varphi^2}\ u - u^2}} = \mp \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\frac{2mE}{p_\varphi^2} + \frac{m^2\alpha^2}{p_\varphi^4} - \left(u - \frac{m\alpha}{p_\varphi^2}\right)^2}}$$

$$= \mp \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\frac{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}{p_\varphi^4} - \left(u - \frac{m\alpha}{p_\varphi^2}\right)^2}}$$

$$=$$

Sprowadźmy trójmian kwadratowy pod pierwiastkiem do postaci kanonicznej

$$\varphi = \mp \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\frac{2mE}{p_\varphi^2} + 2\frac{m\alpha}{p_\varphi^2}\, u - u^2}} = \mp \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\frac{2mE}{p_\varphi^2} + \frac{m^2\alpha^2}{p_\varphi^4} - \left(u - \frac{m\alpha}{p_\varphi^2}\right)^2}}$$

$$= \mp \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\frac{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}{p_\varphi^4} - \left(u - \frac{m\alpha}{p_\varphi^2}\right)^2}}$$

$$= \mp \frac{p_\varphi^2}{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}} \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1 - \left[\frac{p_\varphi^2}{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}}\left(u - \frac{m\alpha}{p_\varphi^2}\right)\right]^2}} \, .$$

Sprowadźmy trójmian kwadratowy pod pierwiastkiem do postaci kanonicznej

$$\begin{aligned}
\varphi &= \mp \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\frac{2mE}{p_\varphi^2} + 2\frac{m\alpha}{p_\varphi^2}\, u - u^2}} = \mp \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\frac{2mE}{p_\varphi^2} + \frac{m^2\alpha^2}{p_\varphi^4} - \left(u - \frac{m\alpha}{p_\varphi^2}\right)^2}} \\
&= \mp \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\frac{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}{p_\varphi^4} - \left(u - \frac{m\alpha}{p_\varphi^2}\right)^2}} \\
&= \mp \frac{p_\varphi^2}{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}} \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1 - \left[\frac{p_\varphi^2}{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}}\left(u - \frac{m\alpha}{p_\varphi^2}\right)\right]^2}} \,.
\end{aligned}$$

Podstawmy

$$x = \frac{p_\varphi^2}{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}}\left(u - \frac{m\alpha}{p_\varphi^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{p_\varphi^2}{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}}\mathrm{d}u$$

Podstawmy

$$x = \frac{p_\varphi^2}{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}}\left(u - \frac{m\alpha}{p_\varphi^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{p_\varphi^2}{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}}\mathrm{d}u$$

wówczas nasza całka przyjmuje prostą postać

$$\varphi = \mp \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}} =$$

Podstawmy

$$x = \frac{p_\varphi^2}{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}}\left(u - \frac{m\alpha}{p_\varphi^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{p_\varphi^2}{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}}\mathrm{d}u$$

wówczas nasza całka przyjmuje prostą postać

$$\varphi = \mp \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \pm \arccos x + \varphi_0 \ ,$$

Podstawmy

$$x = \frac{p_\varphi^2}{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}}\left(u - \frac{m\alpha}{p_\varphi^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{p_\varphi^2}{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}}\mathrm{d}u$$

wówczas nasza całka przyjmuje prostą postać

$$\varphi = \mp \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \pm \arccos x + \varphi_0 \, ,$$

gdzie stałą dowolną oznaczyliśmy φ_0.

Podstawmy

$$x = \frac{p_\varphi^2}{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}}\left(u - \frac{m\alpha}{p_\varphi^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{p_\varphi^2}{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}}\mathrm{d}u$$

wówczas nasza całka przyjmuje prostą postać

$$\varphi = \mp \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \pm \arccos x + \varphi_0 \; ,$$

gdzie stałą dowolną oznaczyliśmy φ_0.
Przepiszmy to równanie w formie

$$\pm \arccos x = \varphi - \varphi_0$$

Podstawmy

$$x = \frac{p_\varphi^2}{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}}\left(u - \frac{m\alpha}{p_\varphi^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{p_\varphi^2}{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}}\mathrm{d}u$$

wówczas nasza całka przyjmuje prostą postać

$$\varphi = \mp \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \pm \arccos x + \varphi_0 \ ,$$

gdzie stałą dowolną oznaczyliśmy φ_0.
Przepiszmy to równanie w formie

$$\pm \arccos x = \varphi - \varphi_0$$

i obliczmy obustronnie cosinus,

Podstawmy

$$x = \frac{p_\varphi^2}{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}} \left(u - \frac{m\alpha}{p_\varphi^2} \right) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{p_\varphi^2}{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}} \mathrm{d}u$$

wówczas nasza całka przyjmuje prostą postać

$$\varphi = \mp \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \pm \arccos x + \varphi_0 \ ,$$

gdzie stałą dowolną oznaczyliśmy φ_0.
Przepiszmy to równanie w formie

$$\pm \arccos x = \varphi - \varphi_0$$

i obliczmy obustronnie cosinus,

wówczas dostaniemy

$$\cos(\pm \arccos x) = x = \cos(\varphi - \varphi_0),$$

gdzie skorzystaliśmy z parzystości funkcji cosinus.

wówczas dostaniemy

$$\cos\left(\pm\arccos x\right) = x = \cos\left(\varphi - \varphi_0\right),$$

gdzie skorzystaliśmy z parzystości funkcji cosinus.
Wstawmy

$$x = \frac{p_\varphi^2}{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}}\left(u - \frac{m\alpha}{p_\varphi^2}\right) =$$

wówczas dostaniemy

$$\cos(\pm \arccos x) = x = \cos(\varphi - \varphi_0)\,,$$

gdzie skorzystaliśmy z parzystości funkcji cosinus.
Wstawmy

$$x = \frac{p_\varphi^2}{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}}\left(u - \frac{m\alpha}{p_\varphi^2}\right) = \frac{p_\varphi^2}{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}}\left(\frac{1}{r} - \frac{m\alpha}{p_\varphi^2}\right),$$

wówczas dostaniemy

$$\cos\left(\pm\arccos x\right) = x = \cos\left(\varphi - \varphi_0\right),$$

gdzie skorzystaliśmy z parzystości funkcji cosinus.
Wstawmy

$$x = \frac{p_\varphi^2}{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}}\left(u - \frac{m\alpha}{p_\varphi^2}\right) = \frac{p_\varphi^2}{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}}\left(\frac{1}{r} - \frac{m\alpha}{p_\varphi^2}\right),$$

wówczas otrzymamy równanie

$$\frac{p_\varphi^2}{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}}\left(\frac{1}{r} - \frac{m\alpha}{p_\varphi^2}\right) = \cos\left(\varphi - \varphi_0\right),$$

wówczas dostaniemy

$$\cos\left(\pm \arccos x\right) = x = \cos\left(\varphi - \varphi_0\right),$$

gdzie skorzystaliśmy z parzystości funkcji cosinus.
Wstawmy

$$x = \frac{p_\varphi^2}{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}}\left(u - \frac{m\alpha}{p_\varphi^2}\right) = \frac{p_\varphi^2}{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}}\left(\frac{1}{r} - \frac{m\alpha}{p_\varphi^2}\right),$$

wówczas otrzymamy równanie

$$\frac{p_\varphi^2}{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}}\left(\frac{1}{r} - \frac{m\alpha}{p_\varphi^2}\right) = \cos\left(\varphi - \varphi_0\right),$$

z którego najpierw wyznaczymy $\frac{1}{r}$

$$\frac{1}{r} = \frac{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}}{p_\varphi^2}\cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{m\alpha}{p_\varphi^2}$$

z którego najpierw wyznaczymy $\frac{1}{r}$

$$\frac{1}{r} = \frac{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}}{p_\varphi^2} \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{m\alpha}{p_\varphi^2}$$

$$=$$

z którego najpierw wyznaczymy $\frac{1}{r}$

$$\frac{1}{r} = \frac{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}}{p_\varphi^2}\cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{m\alpha}{p_\varphi^2}$$

$$= \frac{m\alpha}{p_\varphi^2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2mEp_\varphi^2}{m^2\alpha^2}}\cos(\varphi - \varphi_0)\right),$$

z którego najpierw wyznaczymy $\frac{1}{r}$

$$\frac{1}{r} = \frac{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}}{p_\varphi^2}\cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{m\alpha}{p_\varphi^2}$$
$$= \frac{m\alpha}{p_\varphi^2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2mEp_\varphi^2}{m^2\alpha^2}}\cos(\varphi - \varphi_0)\right),$$

a następnie, odwracając, obliczymy r

$$r = \frac{\frac{p_\varphi^2}{m\alpha}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2}}\cos(\varphi - \varphi_0)}.$$

z którego najpierw wyznaczymy $\frac{1}{r}$

$$\frac{1}{r} = \frac{\sqrt{2mEp_\varphi^2 + m^2\alpha^2}}{p_\varphi^2}\cos(\varphi-\varphi_0) + \frac{m\alpha}{p_\varphi^2} = \frac{m\alpha}{p_\varphi^2}\left(1+\sqrt{1+\frac{2mEp_\varphi^2}{m^2\alpha^2}}\cos(\varphi-\varphi_0)\right),$$

a następnie, odwracając, obliczymy r

$$r = \frac{\frac{p_\varphi^2}{m\alpha}}{1+\sqrt{1+\frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2}}\cos(\varphi-\varphi_0)}.$$

Wprowadźmy następujące oznaczenia

$$p \equiv \frac{p_\varphi^2}{m\alpha} = \mathrm{const},$$

Wprowadźmy następujące oznaczenia

$$p \equiv \frac{p_\varphi^2}{m\alpha} = \mathrm{const}, \quad \varepsilon \equiv \sqrt{1 + \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2}} = \mathrm{const}.$$

Wprowadźmy następujące oznaczenia

$$p \equiv \frac{p_\varphi^2}{m\alpha} = \text{const}, \quad \varepsilon \equiv \sqrt{1 + \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2}} = \text{const}.$$

i wybierzmy dla prostoty $\varphi_0 = 0$,

Wprowadźmy następujące oznaczenia

$$p \equiv \frac{p_\varphi^2}{m\alpha} = \mathrm{const}, \quad \varepsilon \equiv \sqrt{1 + \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2}} = \mathrm{const}.$$

i wybierzmy dla prostoty $\varphi_0 = 0$, wówczas otrzymamy wzór na odległość r ciała od centrum siły w zależności od kąta biegunowego φ

Wprowadźmy następujące oznaczenia

$$p \equiv \frac{p_\varphi^2}{m\alpha} = \mathrm{const}, \quad \varepsilon \equiv \sqrt{1 + \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2}} = \mathrm{const}.$$

i wybierzmy dla prostoty $\varphi_0 = 0$, wówczas otrzymamy wzór na odległość r ciała od centrum siły w zależności od kąta biegunowego φ

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos\varphi} .$$

Wprowadźmy następujące oznaczenia

$$p \equiv \frac{p_\varphi^2}{m\alpha} = \mathrm{const}, \quad \varepsilon \equiv \sqrt{1 + \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2}} = \mathrm{const}.$$

i wybierzmy dla prostoty $\varphi_0 = 0$, wówczas otrzymamy wzór na odległość r ciała od centrum siły w zależności od kąta biegunowego φ

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos\varphi} .$$

Jest to równanie krzywej stożkowej zapisane we współrzędnych biegunowych.

Wprowadźmy następujące oznaczenia

$$p \equiv \frac{p_\varphi^2}{m\alpha} = \text{const}, \quad \varepsilon \equiv \sqrt{1 + \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2}} = \text{const}.$$

i wybierzmy dla prostoty $\varphi_0 = 0$, wówczas otrzymamy wzór na odległość r ciała od centrum siły w zależności od kąta biegunowego φ

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos\varphi} \, .$$

Jest to równanie krzywej stożkowej zapisane we współrzędnych biegunowych. Jedno z ognisk krzywej leży w początku układu, a mimośród jest równy ε.

Wprowadźmy następujące oznaczenia

$$p \equiv \frac{p_\varphi^2}{m\alpha} = \mathrm{const}, \quad \varepsilon \equiv \sqrt{1 + \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2}} = \mathrm{const}.$$

i wybierzmy dla prostoty $\varphi_0 = 0$, wówczas otrzymamy wzór na odległość r ciała od centrum siły w zależności od kąta biegunowego φ

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos\varphi}\,.$$

Jest to równanie krzywej stożkowej zapisane we współrzędnych biegunowych. Jedno z ognisk krzywej leży w początku układu, a mimośród jest równy ε.

Wartość mimośrodu determinuje rodzaj krzywej.
Rozważmy możliwe przypadki.

Wartość mimośrodu determinuje rodzaj krzywej.
Rozważmy możliwe przypadki.

- $\varepsilon = 0$

Wartość mimośrodu determinuje rodzaj krzywej.
Rozważmy możliwe przypadki.

- $\varepsilon = 0 \quad \Rightarrow \quad r(\varphi) = p = \mathrm{const.}$

Wartość mimośrodu determinuje rodzaj krzywej.
Rozważmy możliwe przypadki.

- $\varepsilon = 0 \quad \Rightarrow \quad r(\varphi) = p = \mathrm{const.} \quad \Rightarrow$

Wartość mimośrodu determinuje rodzaj krzywej.
Rozważmy możliwe przypadki.

- $\varepsilon = 0 \quad \Rightarrow \quad r(\varphi) = p = \mathrm{const.} \quad \Rightarrow \quad$ *okrąg*

Wartość mimośrodu determinuje rodzaj krzywej.
Rozważmy możliwe przypadki.

- $\varepsilon = 0 \quad \Rightarrow \quad r(\varphi) = p = \mathrm{const.} \quad \Rightarrow \quad$ *okrąg*

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2Ep_{\varphi}^2}{m\alpha^2}} = 0$$

Wartość mimośrodu determinuje rodzaj krzywej.
Rozważmy możliwe przypadki.

- $\varepsilon = 0 \quad \Rightarrow \quad r(\varphi) = p = \mathrm{const.} \quad \Rightarrow$ *okrąg*

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2} = -1$$

Wartość mimośrodu determinuje rodzaj krzywej.
Rozważmy możliwe przypadki.

- $\varepsilon = 0 \quad \Rightarrow \quad r(\varphi) = p = \mathrm{const.} \quad \Rightarrow \quad$ *okrąg*

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad E = -\frac{m\alpha^2}{2p_\varphi^2} .$$

Wartość mimośrodu determinuje rodzaj krzywej.
Rozważmy możliwe przypadki.

- $\varepsilon = 0 \quad \Rightarrow \quad r(\varphi) = p = \mathrm{const.} \quad \Rightarrow \quad$ *okrąg*

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad E = -\frac{m\alpha^2}{2p_\varphi^2}\ .$$

Taka sytuacja jest oczywiście bardzo mało prawdopodobna.

Wartość mimośrodu determinuje rodzaj krzywej.
Rozważmy możliwe przypadki.

- $\varepsilon = 0 \quad \Rightarrow \quad r(\varphi) = p = \mathrm{const.} \quad \Rightarrow \quad$ *okrąg*

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad E = -\frac{m\alpha^2}{2p_\varphi^2} \, .$$

  Taka sytuacja jest oczywiście bardzo mało prawdopodobna.

- $0 < \varepsilon < 1$

Wartość mimośrodu determinuje rodzaj krzywej.
Rozważmy możliwe przypadki.

- $\varepsilon = 0 \quad \Rightarrow \quad r(\varphi) = p = \mathrm{const.} \quad \Rightarrow \quad$ *okrąg*

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad E = -\frac{m\alpha^2}{2p_\varphi^2}\ .$$

  Taka sytuacja jest oczywiście bardzo mało prawdopodobna.

- $0 < \varepsilon < 1 \quad \Rightarrow$

Wartość mimośrodu determinuje rodzaj krzywej.
Rozważmy możliwe przypadki.

- $\varepsilon = 0 \quad \Rightarrow \quad r(\varphi) = p = \mathrm{const.} \quad \Rightarrow \quad$ *okrąg*

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad E = -\frac{m\alpha^2}{2p_\varphi^2} \,.$$

  Taka sytuacja jest oczywiście bardzo mało prawdopodobna.

- $0 < \varepsilon < 1 \quad \Rightarrow \quad$ *elipsa*

Wartość mimośrodu determinuje rodzaj krzywej.
Rozważmy możliwe przypadki.

- $\varepsilon = 0 \quad \Rightarrow \quad r(\varphi) = p = \mathrm{const.} \quad \Rightarrow \quad$ *okrąg*

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad E = -\frac{m\alpha^2}{2p_\varphi^2}\,.$$

  Taka sytuacja jest oczywiście bardzo mało prawdopodobna.

- $0 < \varepsilon < 1 \quad \Rightarrow \quad$ *elipsa*

$$0 < \sqrt{1 + \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2}} < 1$$

Wartość mimośrodu determinuje rodzaj krzywej.
Rozważmy możliwe przypadki.

- $\varepsilon = 0 \quad \Rightarrow \quad r(\varphi) = p = \mathrm{const.} \quad \Rightarrow \quad$ *okrąg*

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad E = -\frac{m\alpha^2}{2p_\varphi^2} \; .$$

  Taka sytuacja jest oczywiście bardzo mało prawdopodobna.

- $0 < \varepsilon < 1 \quad \Rightarrow \quad$ *elipsa*

$$0 < \sqrt{1 + \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2}} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2} < 0$$

Wartość mimośrodu determinuje rodzaj krzywej.
Rozważmy możliwe przypadki.

- $\varepsilon = 0 \quad \Rightarrow \quad r(\varphi) = p = \mathrm{const.} \quad \Rightarrow \quad$ *okrąg*

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad E = -\frac{m\alpha^2}{2p_\varphi^2}\,.$$

  Taka sytuacja jest oczywiście bardzo mało prawdopodobna.

- $0 < \varepsilon < 1 \quad \Rightarrow \quad$ *elipsa*

$$0 < \sqrt{1 + \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2}} < 1 \;\Leftrightarrow\; -1 < \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2} < 0 \;\Leftrightarrow\; -\frac{m\alpha^2}{2p_\varphi^2} < E < 0\,.$$

Wartość mimośrodu determinuje rodzaj krzywej.
Rozważmy możliwe przypadki.

- $\varepsilon = 0 \quad \Rightarrow \quad r(\varphi) = p = \mathrm{const.} \quad \Rightarrow \quad$ *okrąg*

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad E = -\frac{m\alpha^2}{2p_\varphi^2} \, .$$

  Taka sytuacja jest oczywiście bardzo mało prawdopodobna.

- $0 < \varepsilon < 1 \quad \Rightarrow \quad$ *elipsa*

$$0 < \sqrt{1 + \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2}} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{m\alpha^2}{2p_\varphi^2} < E < 0 \, .$$

- $\varepsilon = 1 \quad \Rightarrow$

- $\varepsilon = 1 \quad \Rightarrow \quad$ *parabola*

- $\varepsilon = 1 \quad \Rightarrow \quad$ *parabola*

$$\sqrt{1 + \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2}} = 1$$

- $\varepsilon = 1 \quad \Rightarrow \quad$ *parabola*

$$\sqrt{1 + \frac{2Ep_{\varphi}^2}{m\alpha^2}} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad E = 0.$$

- $\varepsilon = 1 \quad \Rightarrow \quad$ *parabola*

$$\sqrt{1 + \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2}} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad E = 0.$$

Taka sytuacja również jest bardzo mało prawdopodobna.

- $\varepsilon = 1 \quad \Rightarrow \quad$ *parabola*

$$\sqrt{1 + \frac{2Ep_{\varphi}^2}{m\alpha^2}} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad E = 0.$$

Taka sytuacja również jest bardzo mało prawdopodobna.

- $\varepsilon > 1$

- $\varepsilon = 1 \quad \Rightarrow \quad$ *parabola*

$$\sqrt{1 + \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2}} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad E = 0.$$

Taka sytuacja również jest bardzo mało prawdopodobna.

- $\varepsilon > 1 \quad \Rightarrow$

- $\varepsilon = 1 \quad \Rightarrow \quad$ *parabola*

$$\sqrt{1 + \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2}} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad E = 0.$$

  Taka sytuacja również jest bardzo mało prawdopodobna.

- $\varepsilon > 1 \quad \Rightarrow \quad$ *hiperbola*

- $\varepsilon = 1 \quad \Rightarrow \quad$ *parabola*

$$\sqrt{1 + \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2}} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad E = 0.$$

Taka sytuacja również jest bardzo mało prawdopodobna.

- $\varepsilon > 1 \quad \Rightarrow \quad$ *hiperbola*

$$\sqrt{1 + \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2}} > 1$$

- $\varepsilon = 1 \quad \Rightarrow \quad$ *parabola*

$$\sqrt{1 + \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2}} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad E = 0.$$

Taka sytuacja również jest bardzo mało prawdopodobna.

- $\varepsilon > 1 \quad \Rightarrow \quad$ *hiperbola*

$$\sqrt{1 + \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2}} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad E > 0.$$

- $\varepsilon = 1 \quad \Rightarrow \quad$ *parabola*

$$\sqrt{1 + \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2}} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad E = 0.$$

Taka sytuacja również jest bardzo mało prawdopodobna.

- $\varepsilon > 1 \quad \Rightarrow \quad$ *hiperbola*

$$\sqrt{1 + \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2}} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad E > 0.$$

Orbita ciała poruszającego się w potencjale Keplera będzie najprawdopodobniej

- $\varepsilon = 1 \quad \Rightarrow \quad$ *parabola*

$$\sqrt{1 + \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2}} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad E = 0.$$

Taka sytuacja również jest bardzo mało prawdopodobna.

- $\varepsilon > 1 \quad \Rightarrow \quad$ *hiperbola*

$$\sqrt{1 + \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2}} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad E > 0.$$

Orbita ciała poruszającego się w potencjale Keplera będzie najprawdopodobniej elipsą – orbita zamknięta,

- $\varepsilon = 1 \quad \Rightarrow \quad$ *parabola*

$$\sqrt{1 + \frac{2Ep_{\varphi}^2}{m\alpha^2}} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad E = 0.$$

  Taka sytuacja również jest bardzo mało prawdopodobna.

- $\varepsilon > 1 \quad \Rightarrow \quad$ *hiperbola*

$$\sqrt{1 + \frac{2Ep_{\varphi}^2}{m\alpha^2}} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad E > 0.$$

Orbita ciała poruszającego się w potencjale Keplera będzie najprawdopodobniej elipsą – orbita zamknięta, albo hiperbolą – orbita otwarta.

- $\varepsilon = 1 \quad \Rightarrow \quad$ *parabola*

$$\sqrt{1 + \frac{2Ep_{\varphi}^2}{m\alpha^2}} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad E = 0.$$

  Taka sytuacja również jest bardzo mało prawdopodobna.

- $\varepsilon > 1 \quad \Rightarrow \quad$ *hiperbola*

$$\sqrt{1 + \frac{2Ep_{\varphi}^2}{m\alpha^2}} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad E > 0.$$

Orbita ciała poruszającego się w potencjale Keplera będzie najprawdopodobniej elipsą – orbita zamknięta, albo hiperbolą – orbita otwarta.