Równania Lagrange'a II rodzaju

Wykład 5

Karol Kołodziej

Instytut Fizyki
Uniwersytet Śląski, Katowice
http://kk.us.edu.pl

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Rozważmy układ N punktów materialnych z więzami holonomicznymi danymi równaniami

$$f_i\left(q_1, q_2, ..., q_{3N}, t\right) = 0, \quad i = 1, 2, ..., k.$$

Po wyleliminowaniu k zależnych współrzędnych związki pomiędzy wektorami położenia poszczególnych punktów a $n = 3N - k$ pozostałymi, niezależnymi współrzędnymi uogólnionymi dane są równaniami

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i\left(q_1, q_2, ..., q_n, t\right), \quad i = 1, 2, ..., N.$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Rozważmy układ N punktów materialnych z więzami holonomicznymi danymi równaniami

$$f_i\left(q_1, q_2, ..., q_{3N}, t\right) = 0, \quad i = 1, 2, ..., k.$$

Po wyleliminowaniu k zależnych współrzędnych związki pomiędzy wektorami położenia poszczególnych punktów a $n = 3N - k$ pozostałymi, niezależnymi współrzędnymi uogólnionymi dane są równaniami

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i\left(q_1, q_2, ..., q_n, t\right), \quad i = 1, 2, ..., N.$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Obliczmy pochodną czasową związków

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i\left(q_1, q_2, ..., q_n, t\right), \quad i = 1, 2, ..., N,$$

$$\dot{\vec{r}}_i$$

Obliczmy pochodną czasową związków

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i\left(q_1, q_2, ..., q_n, t\right), \quad i = 1, 2, ..., N,$$

$$\dot{\vec{r}}_i =$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Obliczmy pochodną czasową związków

$$
\begin{aligned}
\vec{r}_i &= \vec{r}_i\left(q_1, q_2, ..., q_n, t\right), \quad i = 1, 2, ..., N, \\
\dot{\vec{r}}_i &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}
\end{aligned}
$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Obliczmy pochodną czasową związków

$$\begin{aligned} \vec{r}_i &= \vec{r}_i\left(q_1, q_2, ..., q_n, t\right), \quad i = 1, 2, ..., N, \\ \dot{\vec{r}}_i &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \end{aligned}$$

i zróżniczkujmy obustronnie po $\dot{q}_l$

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_l} =$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Obliczmy pochodną czasową związków

$$\begin{aligned}\vec{r}_i &= \vec{r}_i\left(q_1, q_2, ..., q_n, t\right), \quad i = 1, 2, ..., N, \\ \dot{\vec{r}}_i &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\end{aligned}$$

i zróżniczkujmy obustronnie po $\dot{q}_l$

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_l} =$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Obliczmy pochodną czasową związków

$$\begin{aligned}\vec{r}_i &= \vec{r}_i\left(q_1, q_2, ..., q_n, t\right), \quad i = 1, 2, ..., N, \\ \dot{\vec{r}}_i &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\end{aligned}$$

i zróżniczkujmy obustronnie po $\dot{q}_l$

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta_{jl} =$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Obliczmy pochodną czasową związków

$$\begin{aligned}
\vec{r}_i &= \vec{r}_i\left(q_1, q_2, ..., q_n, t\right), \quad i = 1, 2, ..., N, \\
\dot{\vec{r}}_i &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}
\end{aligned}$$

i zróżniczkujmy obustronnie po $\dot{q}_l$

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta_{jl} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l},$$

Obliczmy pochodną czasową związków

$$\begin{aligned}\vec{r}_i &= \vec{r}_i\left(q_1, q_2, ..., q_n, t\right), \quad i = 1, 2, ..., N, \\ \dot{\vec{r}}_i &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\end{aligned}$$

i zróżniczkujmy obustronnie po $\dot{q}_l$

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta_{jl} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l},$$

gdzie skorzystaliśmy z faktu, że $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$ i $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$ nie zależą od $\dot{q}_l$, gdyż różniczkowanie jawnej zależności od czasu nie wprowadza zależności od $\dot{q}_l$.

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Obliczmy pochodną czasową związków

$$\begin{aligned} \vec{r}_i &= \vec{r}_i\left(q_1, q_2, ..., q_n, t\right), \quad i = 1, 2, ..., N, \\ \dot{\vec{r}}_i &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \end{aligned}$$

i zróżniczkujmy obustronnie po $\dot{q}_l$

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta_{jl} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l},$$

gdzie skorzystaliśmy z faktu, że $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$ i $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$ nie zależą od $\dot{q}_l$, gdyż różniczkowanie jawnej zależności od czasu nie wprowadza zależności od $\dot{q}_l$.

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Różniczkując obustronnie po q_l wzór

$$\dot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

dostaniemy

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_l} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial q_l} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial t \partial q_l}.$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Różniczkując obustronnie po q_l wzór

$$\dot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

dostaniemy

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_l} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial q_l} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial t \partial q_l}.$$

Z drugiej strony, pochodna $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l}$ jest funkcją współrzędnych $q_1, q_2, \ldots, q_n$ i czasu, więc

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l}\right)\dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_l \partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_l \partial t}.$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Różniczkując obustronnie po q_l wzór

$$\dot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

dostaniemy

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_l} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial q_l} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial t \partial q_l}.$$

Z drugiej strony, pochodna $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l}$ jest funkcją współrzędnych $q_1, q_2, ..., q_n$ i czasu, więc

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l}\right) \dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_l \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_l \partial t}.$$

Dla funkcji klasy $\mathcal{C}^2$ odpowiednie pochodne mieszane są równe, więc

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_l} = \frac{\partial}{\partial q_l}\frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t} =$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Dla funkcji klasy $\mathcal{C}^2$ odpowiednie pochodne mieszane są równe, więc

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_l} = \frac{\partial}{\partial q_l} \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l}\right).$$

Dla funkcji klasy $\mathcal{C}^2$ odpowiednie pochodne mieszane są równe, więc

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_l} = \frac{\partial}{\partial q_l}\frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l}\right).$$

Zatem dla dowolnej funkcji klasy $\mathcal{C}^2$ możemy zamieniać kolejność pochodnych

$$\frac{\partial}{\partial q_l}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial q_l}.$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Dla funkcji klasy $\mathcal{C}^2$ odpowiednie pochodne mieszane są równe, więc

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_l} = \frac{\partial}{\partial q_l}\frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l}\right).$$

Zatem dla dowolnej funkcji klasy $\mathcal{C}^2$ możemy zamieniać kolejność pochodnych

$$\frac{\partial}{\partial q_l}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial q_l}\,.$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Rozpatrywany układ jest opisywany równaniem d'Alemberta

$$\sum_{i=1}^{N} \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = 0.$$

Przesunięcia wirtualne dane są wzorem

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j, \qquad i = 1, 2, ..., N,$$

gdzie pominęliśmy znikający wyraz, który pojawiłby się w wyrażeniu na różniczkę zupełną $\mathrm{d}\vec{r}_i$

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\, \delta t = 0, \quad \text{bo} \quad \delta t = 0,$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Rozpatrywany układ jest opisywany równaniem d'Alemberta

$$\sum_{i=1}^{N} \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = 0.$$

Przesunięcia wirtualne dane są wzorem

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j, \qquad i = 1, 2, ..., N,$$

gdzie pominęliśmy znikający wyraz, który pojawiłby się w wyrażeniu na różniczkę zupełną $\mathrm{d}\vec{r}_i$

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\, \delta t = 0, \quad \text{bo} \quad \delta t = 0,$$

gdyż przesunięcia wirtualne są natychmiastowe.

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Rozpatrywany układ jest opisywany równaniem d'Alemberta

$$\sum_{i=1}^{N} \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = 0.$$

Przesunięcia wirtualne dane są wzorem

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j, \qquad i = 1, 2, ..., N,$$

gdzie pominęliśmy znikający wyraz, który pojawiłby się w wyrażeniu na różniczkę zupełną $\mathrm{d}\vec{r}_i$

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\, \delta t = 0, \quad \text{bo} \quad \delta t = 0,$$

gdyż przesunięcia wirtualne są natychmiastowe.

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Rozważmy drugi wyraz w tym równaniu, który opisuje sumę prac wirtualnych wszystkich sił aktywnych.

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j}_{\delta\vec{r}_i} =$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Rozważmy drugi wyraz w tym równaniu, który opisuje sumę prac wirtualnych wszystkich sił aktywnych.

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j}_{\delta\vec{r}_i} = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right]}_{Q_j} \delta q_j$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Rozważmy drugi wyraz w tym równaniu, który opisuje sumę prac wirtualnych wszystkich sił aktywnych.

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j}_{\delta\vec{r}_i} = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right]}_{Q_j} \delta q_j$$

$$=$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Rozważmy drugi wyraz w tym równaniu, który opisuje sumę prac wirtualnych wszystkich sił aktywnych.

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i &= \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j}_{\delta\vec{r}_i} = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right]}_{Q_j} \delta q_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} Q_j \delta q_j ,
\end{aligned}
$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Rozważmy drugi wyraz w tym równaniu, który opisuje sumę prac wirtualnych wszystkich sił aktywnych.

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i &= \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j}_{\delta\vec{r}_i} = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right]}_{Q_j} \delta q_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} Q_j \delta q_j ,
\end{aligned}
$$

gdzie wstawiliśmy wyrażenie dla $\delta\vec{r}_i$,

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Rozważmy drugi wyraz w tym równaniu, który opisuje sumę prac wirtualnych wszystkich sił aktywnych.

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j}_{\delta\vec{r}_i} = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right]}_{Q_j} \delta q_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} Q_j \delta q_j,$$

gdzie wstawiliśmy wyrażenie dla $\delta\vec{r}_i$, zamieniliśmy kolejność sumowania

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Rozważmy drugi wyraz w tym równaniu, który opisuje sumę prac wirtualnych wszystkich sił aktywnych.

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j}_{\delta\vec{r}_i} = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right]}_{Q_j} \delta q_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} Q_j \delta q_j,$$

gdzie wstawiliśmy wyrażenie dla $\delta\vec{r}_i$, zamieniliśmy kolejność sumowania i wprowadziliśmy symbol siły uogólnionej Q_j,

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Rozważmy drugi wyraz w tym równaniu, który opisuje sumę prac wirtualnych wszystkich sił aktywnych.

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j}_{\delta\vec{r}_i} = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right]}_{Q_j} \delta q_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} Q_j \delta q_j,$$

gdzie wstawiliśmy wyrażenie dla $\delta\vec{r}_i$, zamieniliśmy kolejność sumowania i wprowadziliśmy symbol siły uogólnionej Q_j, która dana jest wzorem

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}.$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Rozważmy drugi wyraz w tym równaniu, który opisuje sumę prac wirtualnych wszystkich sił aktywnych.

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j}_{\delta\vec{r}_i} = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right]}_{Q_j} \delta q_j$$
$$= \sum_{j=1}^{n} Q_j \delta q_j,$$

gdzie wstawiliśmy wyrażenie dla $\delta\vec{r}_i$, zamieniliśmy kolejność sumowania i wprowadziliśmy symbol siły uogólnionej Q_j, która dana jest wzorem

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} .$$

Rozważmy pierwszy wyraz w równaniu d'Alemberta.

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i \quad =$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Rozważmy pierwszy wyraz w równaniu d'Alemberta.

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta\vec{r}_i \quad = \quad \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j}_{\delta \vec{r}_i} =$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Rozważmy pierwszy wyraz w równaniu d'Alemberta.

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta\vec{r}_i \quad = \quad \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j}_{\delta\vec{r}_i} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j,$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Rozważmy pierwszy wyraz w równaniu d'Alemberta.

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j}_{\delta\vec{r}_i} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j,$$

gdzie znowu wstawiliśmy wyrażenie na $\delta\vec{r}_i$ i zamieniliśmy kolejność sumowania.

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Rozważmy pierwszy wyraz w równaniu d'Alemberta.

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j}_{\delta\vec{r}_i} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j,$$

gdzie znowu wstawiliśmy wyrażenie na $\delta\vec{r}_i$ i zamieniliśmy kolejność sumowania.

Skorzystajmy z wzoru na pochodną iloczynu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) = \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} + \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Rozważmy pierwszy wyraz w równaniu d'Alemberta.

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j}_{\delta\vec{r}_i} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j,$$

gdzie znowu wstawiliśmy wyrażenie na $\delta\vec{r}_i$ i zamieniliśmy kolejność sumowania.
Skorzystajmy z wzoru na pochodną iloczynu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) = \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} + \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

$\Rightarrow$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Rozważmy pierwszy wyraz w równaniu d'Alemberta.

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j}_{\delta\vec{r}_i} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j,$$

gdzie znowu wstawiliśmy wyrażenie na $\delta\vec{r}_i$ i zamieniliśmy kolejność sumowania.

Skorzystajmy z wzoru na pochodną iloczynu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) = \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} + \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}.$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Rozważmy pierwszy wyraz w równaniu d'Alemberta.

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j}_{\delta \vec{r}_i} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j,$$

gdzie znowu wstawiliśmy wyrażenie na $\delta \vec{r}_i$ i zamieniliśmy kolejność sumowania.

Skorzystajmy z wzoru na pochodną iloczynu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) = \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} + \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}.$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Skorzystajmy z udowodnionych wcześniej tożsamości:

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \qquad \text{i} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l}\right) = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_l}$$

we wzorze

$$\ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}\right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j}\,.$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Skorzystajmy z udowodnionych wcześniej tożsamości:

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \qquad \text{i} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l}\right) = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_l}$$

we wzorze

$$\ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}\right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j}\,.$$

Zauważmy ponadto, że

$$\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^{\,2}}{\partial \dot{q}_j} \qquad \text{oraz} \qquad \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^{\,2}}{\partial q_j}.$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Skorzystajmy z udowodnionych wcześniej tożsamości:

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \qquad \mathrm{i} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l}\right) = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_l}$$

we wzorze

$$\ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}\right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j} .$$

Zauważmy ponadto, że

$$\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^{\,2}}{\partial \dot{q}_j} \qquad \text{oraz} \qquad \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^{\,2}}{\partial q_j}.$$

Dlatego

$$\ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\,\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^{\,2}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{1}{2}\,\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^{\,2}}{\partial q_j}.$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Skorzystajmy z udowodnionych wcześniej tożsamości:

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \qquad \mathrm{i} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l}\right) = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_l}$$

we wzorze

$$\ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}\right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j} .$$

Zauważmy ponadto, że

$$\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^{\,2}}{\partial \dot{q}_j} \qquad \text{oraz} \qquad \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^{\,2}}{\partial q_j}.$$

Dlatego

$$\ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\,\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^{\,2}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{1}{2}\,\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^{\,2}}{\partial q_j}.$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Wróćmy do pierwszego wyrazu w równaniu d'Alemberta.

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta\vec{r}_i \quad = \quad \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Wróćmy do pierwszego wyrazu w równaniu d'Alemberta.

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j$$

$$=$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Wróćmy do pierwszego wyrazu w równaniu d'Alemberta.

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{N} m_i \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^2}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^2}{\partial q_j}\right]\delta q_j$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Wróćmy do pierwszego wyrazu w równaniu d'Alemberta.

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{N} m_i \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^2}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^2}{\partial q_j} \right] \delta q_j \\
&=
\end{aligned}
$$

Wróćmy do pierwszego wyrazu w równaniu d'Alemberta.

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{N} m_i \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\,\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^2}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{1}{2}\,\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^2}{\partial q_j}\right]\delta q_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}\,m_i \dot{\vec{r}}_i^2\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i \dot{\vec{r}}_i^2\right)\right]\delta q_j$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Wróćmy do pierwszego wyrazu w równaniu d'Alemberta.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta\vec{r}_i &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{N} m_i \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\,\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^{\,2}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{1}{2}\,\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^{\,2}}{\partial q_j}\right]\delta q_j \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}\,m_i\dot{\vec{r}}_i^{\,2}\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\dot{\vec{r}}_i^{\,2}\right)\right]\delta q_j \\
&=
\end{aligned}$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Wróćmy do pierwszego wyrazu w równaniu d'Alemberta.

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta\vec{r}_i &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{N} m_i \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\,\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^{\,2}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{1}{2}\,\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^{\,2}}{\partial q_j}\right]\delta q_j \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}\,m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}\right)\right]\delta q_j \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}\right]\delta q_j,
\end{aligned}
$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Wróćmy do pierwszego wyrazu w równaniu d'Alemberta.

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta\vec{r}_i &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{N} m_i \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\,\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^2}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{1}{2}\,\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^2}{\partial q_j}\right]\delta q_j \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}\,m_i \dot{\vec{r}}_i^2\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i \dot{\vec{r}}_i^2\right)\right]\delta q_j \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}\right]\delta q_j,
\end{aligned}
$$

gdzie wyciągnęliśmy pochodne przed sumę po i oraz

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Wróćmy do pierwszego wyrazu w równaniu d'Alemberta.

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{N} m_i \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^2}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^2}{\partial q_j} \right] \delta q_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \right) \right] \delta q_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j ,
\end{aligned}
$$

gdzie wyciągnęliśmy pochodne przed sumę po i oraz

wprowadziliśmy wzór na energię kinetyczną układu N punktów materialnych

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2}\, m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}.$$

Wstawmy otrzymane wyniki do równania d'Alemberta

$$\sum_{i=1}^{N} \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i \right) \cdot \delta\vec{r}_i \quad =$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

wprowadziliśmy wzór na energię kinetyczną układu N punktów materialnych

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2}\, m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}.$$

Wstawmy otrzymane wyniki do równania d'Alemberta

$$\sum_{i=1}^{N} \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j - \sum_{j=1}^{n} Q_j \delta q_j$$

wprowadziliśmy wzór na energię kinetyczną układu N punktów materialnych

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2}\, m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}.$$

Wstawmy otrzymane wyniki do równania d'Alemberta

$$\sum_{i=1}^{N} \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j - \sum_{j=1}^{n} Q_j \delta q_j$$

$$=$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

wprowadziliśmy wzór na energię kinetyczną układu N punktów materialnych

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2}\, m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}.$$

Wstawmy otrzymane wyniki do równania d'Alemberta

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N} \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j - \sum_{j=1}^{n} Q_j \delta q_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right] \delta q_j = 0.\end{aligned}$$

wprowadziliśmy wzór na energię kinetyczną układu N punktów materialnych

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2}\, m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}.$$

Wstawmy otrzymane wyniki do równania d'Alemberta

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}\left(m_i\ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i\right)\cdot\delta\vec{r}_i &= \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}\right]\delta q_j - \sum_{j=1}^{n} Q_j\delta q_j \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j\right]\delta q_j = 0.\end{aligned}$$

Ponieważ wszystkie przesunięcia wirtualne δq_j, $j = 1, 2, ..., n$, są niezależne,

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

wprowadziliśmy wzór na energię kinetyczną układu N punktów materialnych

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2}\, m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}.$$

Wstawmy otrzymane wyniki do równania d'Alemberta

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j - \sum_{j=1}^{n} Q_j \delta q_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right] \delta q_j = 0. \end{aligned}$$

Ponieważ wszystkie przesunięcia wirtualne δq_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, są niezależne,

to wszystkie współczynniki tej kombinacji liniowej muszą znikać, a więc

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = 0, \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

W mechanice istotną rolę odgrywają siły zachowawcze, dla których istnieje potencjał $V = V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N, t) \equiv V(\vec{r}, t)$, taki że

$$\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V(\vec{r}, t)$$

to wszystkie współczynniki tej kombinacji liniowej muszą znikać, a więc

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = 0, \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

W mechanice istotną rolę odgrywają siły zachowawcze, dla których istnieje potencjał $V = V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N, t) \equiv V(\vec{r}, t)$, taki że

$$\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V(\vec{r}, t) = -\left[\frac{\partial V}{\partial x_i}, \frac{\partial V}{\partial y_i}, \frac{\partial V}{\partial z_i}\right]$$

to wszystkie współczynniki tej kombinacji liniowej muszą znikać, a więc

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = 0, \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

W mechanice istotną rolę odgrywają siły zachowawcze, dla których istnieje potencjał $V = V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N, t) \equiv V(\vec{r}, t)$, taki że

$$\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V(\vec{r}, t) = -\left[\frac{\partial V}{\partial x_i}, \frac{\partial V}{\partial y_i}, \frac{\partial V}{\partial z_i}\right] \equiv -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i}.$$

to wszystkie współczynniki tej kombinacji liniowej muszą znikać, a więc

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = 0, \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

W mechanice istotną rolę odgrywają siły zachowawcze, dla których istnieje potencjał $V = V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N, t) \equiv V(\vec{r}, t)$, taki że

$$\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V(\vec{r}, t) = -\left[\frac{\partial V}{\partial x_i}, \frac{\partial V}{\partial y_i}, \frac{\partial V}{\partial z_i}\right] \equiv -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} \, .$$

Dla sił zachowawczych siła uogólniona ma postać

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

to wszystkie współczynniki tej kombinacji liniowej muszą znikać, a więc

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = 0, \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

W mechanice istotną rolę odgrywają siły zachowawcze, dla których istnieje potencjał $V = V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N, t) \equiv V(\vec{r}, t)$, taki że

$$\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V(\vec{r}, t) = -\left[\frac{\partial V}{\partial x_i}, \frac{\partial V}{\partial y_i}, \frac{\partial V}{\partial z_i}\right] \equiv -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i}\ .$$

Dla sił zachowawczych siła uogólniona ma postać

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial V(\vec{r}, t)}{\partial \vec{r}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

to wszystkie współczynniki tej kombinacji liniowej muszą znikać, a więc

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = 0, \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

W mechanice istotną rolę odgrywają siły zachowawcze, dla których istnieje potencjał $V = V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N, t) \equiv V(\vec{r}, t)$, taki że

$$\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V(\vec{r}, t) = -\left[\frac{\partial V}{\partial x_i}, \frac{\partial V}{\partial y_i}, \frac{\partial V}{\partial z_i}\right] \equiv -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} \ .$$

Dla sił zachowawczych siła uogólniona ma postać

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial V(\vec{r}, t)}{\partial \vec{r}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial V(q, t)}{\partial q_j} \ .$$

to wszystkie współczynniki tej kombinacji liniowej muszą znikać, a więc

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = 0, \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

W mechanice istotną rolę odgrywają siły zachowawcze, dla których istnieje potencjał $V = V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N, t) \equiv V(\vec{r}, t)$, taki że

$$\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V(\vec{r}, t) = -\left[\frac{\partial V}{\partial x_i}, \frac{\partial V}{\partial y_i}, \frac{\partial V}{\partial z_i}\right] \equiv -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} .$$

Dla sił zachowawczych siła uogólniona ma postać

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial V(\vec{r}, t)}{\partial \vec{r}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial V(q, t)}{\partial q_j} .$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Uwaga: Biorąc ściśle, V jest energią potencjalną.

Nasze równania przyjmują teraz postać

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = 0, \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

Uwaga: Biorąc ściśle, V jest energią potencjalną.
Nasze równania przyjmują teraz postać

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = 0, \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

Ponieważ $V(q, t)$ nie zależy od prędkości, to $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$, więc

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, ..., n.$$

Uwaga: Biorąc ściśle, V jest energią potencjalną.
Nasze równania przyjmują teraz postać

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = 0, \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

Ponieważ $V(q,t)$ nie zależy od prędkości, to $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0,$ więc

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, ..., n.$$

Zdefiniujmy funkcję Lagrange'a

$$L(q,\dot{q},t) = T(q,\dot{q},t) - V(q,t),$$

która jest różnicą energii kinetycznej i potencjalnej,

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Uwaga: Biorąc ściśle, V jest energią potencjalną.
Nasze równania przyjmują teraz postać

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = 0, \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

Ponieważ $V(q,t)$ nie zależy od prędkości, to $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$, więc

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, ..., n.$$

Zdefiniujmy funkcję Lagrange'a

$$L(q,\dot{q},t) = T(q,\dot{q},t) - V(q,t),$$

która jest różnicą energii kinetycznej i potencjalnej, wówczas otrzymamy równania Lagrange'a II rodzaju:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

Są one równaniami różniczkowymi drugiego rzędu, gdyż zawierają drugie pochodne.

wówczas otrzymamy równania Lagrange'a II rodzaju:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

Są one równaniami różniczkowymi drugiego rzędu, gdyż zawierają drugie pochodne.

Dla odpowiednio regularnych energii potencjalnych $V(q, t)$ posiadają one jednoznaczne rozwiązania przy warunkach początkowych na współrzędne i prędkości uogólnione

$$q_j(0) = q_{j0}, \qquad \dot{q}_j(0) = \dot{q}_{j0}, \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

wówczas otrzymamy równania Lagrange'a II rodzaju:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

Są one równaniami różniczkowymi drugiego rzędu, gdyż zawierają drugie pochodne.
Dla odpowiednio regularnych energii potencjalnych $V(q, t)$ posiadają one jednoznaczne rozwiązania przy warunkach początkowych na współrzędne i prędkości uogólnione

$$q_j(0) = q_{j0}, \qquad \dot{q}_j(0) = \dot{q}_{j0}, \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

Równania Lagrange'a II rodzaju są spełnione dla więzów holonomicznych.

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

wówczas otrzymamy równania Lagrange'a II rodzaju:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

Są one równaniami różniczkowymi drugiego rzędu, gdyż zawierają drugie pochodne.
Dla odpowiednio regularnych energii potencjalnych $V(q, t)$ posiadają one jednoznaczne rozwiązania przy warunkach początkowych na współrzędne i prędkości uogólnione

$$q_j(0) = q_{j0}, \qquad \dot{q}_j(0) = \dot{q}_{j0}, \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

Równania Lagrange'a II rodzaju są spełnione dla więzów holonomicznych.

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Wróćmy do równań

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = 0, \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

Równania Lagrange'a moglibyśmy również otrzymać zakładając istnienie tzw. potencjału uogólnionego $V(q, \dot{q}, t)$, zależnego od prędkości, który wiąże się z siłą uogólnioną Q_j wzorem

$$Q_j = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j}.$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Wróćmy do równań

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = 0, \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

Równania Lagrange'a moglibyśmy również otrzymać zakładając istnienie tzw. potencjału uogólnionego $V(q, \dot{q}, t)$, zależnego od prędkości, który wiąże się z siłą uogólnioną Q_j wzorem

$$Q_j = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j}\ .$$

Po wstawieniu otrzymamy równania

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = 0, \qquad j = 1, 2, ..., n,$$

Wyprowadzenie z równania d'Alemberta

Wróćmy do równań

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = 0, \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

Równania Lagrange'a moglibyśmy również otrzymać zakładając istnienie tzw. potencjału uogólnionego $V(q, \dot{q}, t)$, zależnego od prędkości, który wiąże się z siłą uogólnioną Q_j wzorem

$$Q_j = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j}\ .$$

Po wstawieniu otrzymamy równania

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = 0, \qquad j = 1, 2, ..., n,$$

a wprowadzając funkcję Lagrange'a

$$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - V(q, \dot{q}, t),$$

dostaniemy równania Lagrange'a II rodzaju

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

a wprowadzając funkcję Lagrange'a

$$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - V(q, \dot{q}, t),$$

dostaniemy równania Lagrange'a II rodzaju

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

Znaczenie potencjałów uogólnionych w fizyce teoretycznej ilustruje następujący przykład.

a wprowadzając funkcję Lagrange'a

$$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - V(q, \dot{q}, t),$$

dostaniemy równania Lagrange'a II rodzaju

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

Znaczenie potencjałów uogólnionych w fizyce teoretycznej ilustruje następujący przykład.

Potencjały uogólnione

Przykład 1: Na cząstkę o masie m i ładunku elektrycznym q znajdującą się w polu elektromagnetycznym o natężeniu pola elektrycznego $\vec{E}$ i indukcji magnetycznej $\vec{B}$:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r},t) - \frac{\partial \vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t} \quad , \quad \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r},t)\,,$$

gdzie $\varphi(\vec{r},t)$ i $\vec{A}(\vec{r},t)$ są odpowiednio potencjałami skalarnym i wektorowym, *Przykład 1:* Na cząstkę o masie m i ładunku elektrycznym q znajdującą się w polu elektromagnetycznym o natężeniu pola elektrycznego $\vec{E}$ i indukcji magnetycznej $\vec{B}$:

$$\vec{E}\left(\vec{r},t\right) = -\vec{\nabla}\varphi\left(\vec{r},t\right) - \frac{\partial\vec{A}\left(\vec{r},t\right)}{\partial t} \quad , \quad \vec{B}\left(\vec{r},t\right) = \vec{\nabla}\times\vec{A}\left(\vec{r},t\right),$$

gdzie $\varphi(\vec{r},t)$ i $\vec{A}(\vec{r},t)$ są odpowiednio potencjałami skalarnym i wektorowym, działa siła Lorentza

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right).$$

Potencjały uogólnione

Przykład 1: Na cząstkę o masie m i ładunku elektrycznym q znajdującą się w polu elektromagnetycznym o natężeniu pola elektrycznego $\vec{E}$ i indukcji magnetycznej $\vec{B}$:

$$\vec{E}\left(\vec{r},t\right) = -\vec{\nabla}\varphi\left(\vec{r},t\right) - \frac{\partial\vec{A}\left(\vec{r},t\right)}{\partial t} \quad , \quad \vec{B}\left(\vec{r},t\right) = \vec{\nabla}\times\vec{A}\left(\vec{r},t\right),$$

gdzie $\varphi(\vec{r},t)$ i $\vec{A}(\vec{r},t)$ są odpowiednio potencjałami skalarnym i wektorowym, działa siła Lorentza

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right).$$

Dla siły Lorentza nie istnieje potencjał.

Potencjały uogólnione

Przykład 1: Na cząstkę o masie m i ładunku elektrycznym q znajdującą się w polu elektromagnetycznym o natężeniu pola elektrycznego $\vec{E}$ i indukcji magnetycznej $\vec{B}$:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r},t) - \frac{\partial \vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t} \quad , \quad \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r},t) \, ,$$

gdzie $\varphi(\vec{r},t)$ i $\vec{A}(\vec{r},t)$ są odpowiednio potencjałami skalarnym i wektorowym, działa siła Lorentza

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right).$$

Dla siły Lorentza nie istnieje potencjał. Można ją jednak wyprowadzić z potencjału uogólnionego postaci

Potencjały uogólnione

Przykład 1: Na cząstkę o masie m i ładunku elektrycznym q znajdującą się w polu elektromagnetycznym o natężeniu pola elektrycznego $\vec{E}$ i indukcji magnetycznej $\vec{B}$:

$$\vec{E}\left(\vec{r},t\right) = -\vec{\nabla}\varphi\left(\vec{r},t\right) - \frac{\partial\vec{A}\left(\vec{r},t\right)}{\partial t} \quad , \quad \vec{B}\left(\vec{r},t\right) = \vec{\nabla}\times\vec{A}\left(\vec{r},t\right),$$

gdzie $\varphi(\vec{r},t)$ i $\vec{A}(\vec{r},t)$ są odpowiednio potencjałami skalarnym i wektorowym, działa siła Lorentza

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right).$$

Dla siły Lorentza nie istnieje potencjał. Można ją jednak wyprowadzić z potencjału uogólnionego postaci

$$V\left(\vec{r},\vec{v},t\right)=q\left(\varphi\left(\vec{r},t\right)-\vec{A}\left(\vec{r},t\right)\cdot\vec{v}\right).$$

Najpierw pokażemy, że w przypadku, gdy położenie punktu opisujemy współrzędnymi kartezjańskimi (x_1, x_2, x_3), siły uogólnione

$$Q_j=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}$$

pokrywają się ze składowymi kartezjańskimi siły $\vec{F}_i$.

Potencjały uogólnione

$$V(\vec{r}, \vec{v}, t) = q\left(\varphi(\vec{r}, t) - \vec{A}(\vec{r}, t) \cdot \vec{v}\right).$$

Najpierw pokażemy, że w przypadku, gdy położenie punktu opisujemy współrzędnymi kartezjańskimi (x_1, x_2, x_3), siły uogólnione

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

pokrywają się ze składowymi kartezjańskimi siły $\vec{F}_i$.
Dla prostoty dowód przeprowadzimy dla przypadku jednego punktu materialnego.

Potencjały uogólnione

$$V\left(\vec{r}, \vec{v}, t\right) = q\left(\varphi\left(\vec{r}, t\right) - \vec{A}\left(\vec{r}, t\right) \cdot \vec{v}\right).$$

Najpierw pokażemy, że w przypadku, gdy położenie punktu opisujemy współrzędnymi kartezjańskimi (x_1, x_2, x_3), siły uogólnione

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

pokrywają się ze składowymi kartezjańskimi siły $\vec{F}_i$.
Dla prostoty dowód przeprowadzimy dla przypadku jednego punktu materialnego.

Potencjały uogólnione

Rzeczywiście, dla $N = 1$, $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ i $q_j = x_j$ otrzymamy

$$Q_j = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_j} = F_i \frac{\partial x_i}{\partial x_j}$$

Potencjały uogólnione

Rzeczywiście, dla $N = 1$, $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ i $q_j = x_j$ otrzymamy

$$Q_j = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_j} = F_i \, \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = F_i \, \delta_{ij}$$

Potencjały uogólnione

Rzeczywiście, dla $N = 1$, $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ i $q_j = x_j$ otrzymamy

$$Q_j = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_j} = F_i \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = F_i \, \delta_{ij} = F_j, \qquad j = 1, 2, 3.$$

Rzeczywiście, dla $N = 1$, $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ i $q_j = x_j$ otrzymamy

$$Q_j = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_j} = F_i \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = F_i \, \delta_{ij} = F_j, \qquad j = 1, 2, 3.$$

Zatem i-ta składowa siły Lorentza powinna wyrazić się wzorem

$$F_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial x_i}$$

Potencjały uogólnione

Rzeczywiście, dla $N = 1$, $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ i $q_j = x_j$ otrzymamy

$$Q_j = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_j} = F_i \, \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = F_i \, \delta_{ij} = F_j, \qquad j = 1, 2, 3.$$

Zatem i-ta składowa siły Lorentza powinna wyrazić się wzorem

$$F_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial x_i}$$

$$=$$

Rzeczywiście, dla $N = 1$, $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ i $q_j = x_j$ otrzymamy

$$Q_j = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_j} = F_i \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = F_i \, \delta_{ij} = F_j, \qquad j = 1, 2, 3.$$

Zatem i-ta składowa siły Lorentza powinna wyrazić się wzorem

$$\begin{aligned} F_i &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial x_i} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \left[q \left(\varphi - A_j \dot{x}_j \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[q \left(\varphi - A_j \dot{x}_j \right) \right] \end{aligned}$$

Rzeczywiście, dla $N = 1$, $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ i $q_j = x_j$ otrzymamy

$$Q_j = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_j} = F_i \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = F_i\, \delta_{ij} = F_j, \qquad j = 1, 2, 3.$$

Zatem i-ta składowa siły Lorentza powinna wyrazić się wzorem

$$\begin{aligned} F_i &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial x_i} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\left[q\left(\varphi - A_j \dot{x}_j\right)\right] - \frac{\partial}{\partial x_i}\left[q\left(\varphi - A_j \dot{x}_j\right)\right] \\ &= \end{aligned}$$

Rzeczywiście, dla $N = 1$, $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ i $q_j = x_j$ otrzymamy

$$Q_j = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_j} = F_i \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = F_i\, \delta_{ij} = F_j, \qquad j = 1, 2, 3.$$

Zatem i-ta składowa siły Lorentza powinna wyrazić się wzorem

$$\begin{aligned} F_i &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial x_i} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\left[q\left(\varphi - A_j \dot{x}_j\right)\right] - \frac{\partial}{\partial x_i}\left[q\left(\varphi - A_j \dot{x}_j\right)\right] \\ &= -q\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{\left(A_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{x}_i}\right)}_{A_j \delta_{ij} = A_i} - q\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + q\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\dot{x}_j\,, \end{aligned}$$

Potencjały uogólnione

Rzeczywiście, dla $N = 1$, $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ i $q_j = x_j$ otrzymamy

$$Q_j = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_j} = F_i \, \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = F_i \, \delta_{ij} = F_j, \qquad j = 1, 2, 3.$$

Zatem i-ta składowa siły Lorentza powinna wyrazić się wzorem

$$\begin{aligned} F_i &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial x_i} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\left[q\left(\varphi - A_j \dot{x}_j\right)\right] - \frac{\partial}{\partial x_i}\left[q\left(\varphi - A_j \dot{x}_j\right)\right] \\ &= -q\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{\left(A_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{x}_i}\right)}_{A_j\delta_{ij} = A_i} - q\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + q\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\dot{x}_j \ , \end{aligned}$$

Potencjały uogólnione

$$F_i = -q\frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t} - q\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + q\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\dot{x}_j$$

$$=$$

$$
\begin{aligned}
F_i &= -q\frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t} - q\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + q\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\dot{x}_j \\
&= -q\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j}\dot{x}_j + \frac{\partial A_i}{\partial t}\right) - q\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + q\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\dot{x}_j
\end{aligned}
$$

Potencjały uogólnione

$$\begin{aligned}
F_i &= -q\frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t} - q\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + q\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\dot{x}_j \\
&= -q\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j}\dot{x}_j + \frac{\partial A_i}{\partial t}\right) - q\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + q\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\dot{x}_j \\
&=
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_i &= -q\frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t} - q\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + q\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\dot{x}_j \\
&= -q\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j}\dot{x}_j + \frac{\partial A_i}{\partial t}\right) - q\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + q\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\dot{x}_j \\
&= \underbrace{q\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t}\right)}_{E_i} + \underbrace{q\,\dot{x}_j\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right)}_{(\vec{v}\times\vec{B})_i}
\end{aligned}$$

Potencjały uogólnione

$$
\begin{aligned}
F_i &= -q\frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t} - q\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + q\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\dot{x}_j \\
&= -q\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j}\dot{x}_j + \frac{\partial A_i}{\partial t}\right) - q\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + q\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\dot{x}_j \\
&= q\underbrace{\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t}\right)}_{E_i} + q\,\underbrace{\dot{x}_j\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right)}_{(\vec{v}\times\vec{B})_i} \\
&=
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_i &= -q\frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t} - q\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + q\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\dot{x}_j \\
&= -q\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j}\dot{x}_j + \frac{\partial A_i}{\partial t}\right) - q\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + q\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\dot{x}_j \\
&= \underbrace{q\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t}\right)}_{E_i} + \underbrace{q\,\dot{x}_j\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right)}_{(\vec{v}\times\vec{B})_i} \\
&= q\left[E_i + (\vec{v}\times\vec{B})_i\right].
\end{aligned}
$$

Potencjały uogólnione

$$
\begin{aligned}
F_i &= -q\frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t} - q\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + q\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\dot{x}_j \\
&= -q\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j}\dot{x}_j + \frac{\partial A_i}{\partial t}\right) - q\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + q\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\dot{x}_j \\
&= q\underbrace{\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t}\right)}_{E_i} + q\underbrace{\dot{x}_j\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right)}_{(\vec{v}\times\vec{B})_i} \\
&= q\left[E_i + (\vec{v}\times\vec{B})_i\right].
\end{aligned}
$$

Aby skończyć dowód musimy pokazać, że

$$
(\vec{v}\times\vec{B})_i = \dot{x}_j\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right).
$$

Potencjały uogólnione

$$\begin{aligned}
F_i &= -q\frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t} - q\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + q\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\dot{x}_j \\
&= -q\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j}\dot{x}_j + \frac{\partial A_i}{\partial t}\right) - q\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + q\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\dot{x}_j \\
&= \underbrace{q\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t}\right)}_{E_i} + q\,\underbrace{\dot{x}_j\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right)}_{(\vec{v}\times\vec{B})_i} \\
&= q\left[E_i + (\vec{v}\times\vec{B})_i\right].
\end{aligned}$$

Aby skończyć dowód musimy pokazać, że

$$(\vec{v}\times\vec{B})_i = \dot{x}_j\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right).$$

Potencjały uogólnione

Rzeczywiście

$$(\vec{v} \times \vec{B})_i = \varepsilon_{ijk}\dot{x}_j B_k = \varepsilon_{ijk}\dot{x}_j(\vec{\nabla} \times \vec{A})_k$$

Rzeczywiście

$$(\vec{v} \times \vec{B})_i \quad = \quad \varepsilon_{ijk}\dot{x}_j B_k = \varepsilon_{ijk}\dot{x}_j(\vec{\nabla} \times \vec{A})_k = \dot{x}_j \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} \frac{\partial A_n}{\partial x_m}$$

Rzeczywiście

$$
\begin{aligned}
(\vec{v} \times \vec{B})_i &= \varepsilon_{ijk} \dot{x}_j B_k = \varepsilon_{ijk} \dot{x}_j (\vec{\nabla} \times \vec{A})_k = \dot{x}_j \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} \frac{\partial A_n}{\partial x_m} \\
&=
\end{aligned}
$$

Rzeczywiście

$$
\begin{aligned}
(\vec{v} \times \vec{B})_i &= \varepsilon_{ijk}\dot{x}_j B_k = \varepsilon_{ijk}\dot{x}_j(\vec{\nabla} \times \vec{A})_k = \dot{x}_j \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn}\frac{\partial A_n}{\partial x_m} \\
&= \dot{x}_j \left(\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}\right) \frac{\partial A_n}{\partial x_m}
\end{aligned}
$$

Potencjały uogólnione

Rzeczywiście

$$
\begin{aligned}
(\vec{v} \times \vec{B})_i &= \varepsilon_{ijk}\dot{x}_j B_k = \varepsilon_{ijk}\dot{x}_j(\vec{\nabla} \times \vec{A})_k = \dot{x}_j \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn}\frac{\partial A_n}{\partial x_m} \\
&= \dot{x}_j \left(\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}\right) \frac{\partial A_n}{\partial x_m} \\
&=
\end{aligned}
$$

Rzeczywiście

$$
\begin{aligned}
(\vec{v} \times \vec{B})_i &= \varepsilon_{ijk}\dot{x}_j B_k = \varepsilon_{ijk}\dot{x}_j(\vec{\nabla} \times \vec{A})_k = \dot{x}_j \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn}\frac{\partial A_n}{\partial x_m} \\
&= \dot{x}_j \left(\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}\right) \frac{\partial A_n}{\partial x_m} \\
&= \dot{x}_j \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right),
\end{aligned}
$$

Rzeczywiście

$$\begin{aligned}
(\vec{v} \times \vec{B})_i &= \varepsilon_{ijk}\dot{x}_j B_k = \varepsilon_{ijk}\dot{x}_j(\vec{\nabla} \times \vec{A})_k = \dot{x}_j \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn}\frac{\partial A_n}{\partial x_m} \\
&= \dot{x}_j \left(\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}\right)\frac{\partial A_n}{\partial x_m} \\
&= \dot{x}_j \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right),
\end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy udowodnione wcześniej własności tensora antysymetrycznego

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn} =$$

Rzeczywiście

$$\begin{aligned}(\vec{v}\times\vec{B})_i &= \varepsilon_{ijk}\dot{x}_j B_k = \varepsilon_{ijk}\dot{x}_j(\vec{\nabla}\times\vec{A})_k = \dot{x}_j\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn}\frac{\partial A_n}{\partial x_m} \\ &= \dot{x}_j\left(\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm}\right)\frac{\partial A_n}{\partial x_m} \\ &= \dot{x}_j\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i}-\frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right),\end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy udowodnione wcześniej własności tensora antysymetrycznego

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn} = \varepsilon_{kij}\varepsilon_{kmn} =$$

Potencjały uogólnione

Rzeczywiście

$$
\begin{aligned}
(\vec{v} \times \vec{B})_i &= \varepsilon_{ijk}\dot{x}_j B_k = \varepsilon_{ijk}\dot{x}_j(\vec{\nabla} \times \vec{A})_k = \dot{x}_j \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn}\frac{\partial A_n}{\partial x_m} \\
&= \dot{x}_j \left(\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}\right)\frac{\partial A_n}{\partial x_m} \\
&= \dot{x}_j \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right),
\end{aligned}
$$

gdzie wykorzystaliśmy udowodnione wcześniej własności tensora antysymetrycznego

$$
\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn} = \varepsilon_{kij}\varepsilon_{kmn} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm} \, .
$$

Potencjały uogólnione

Rzeczywiście

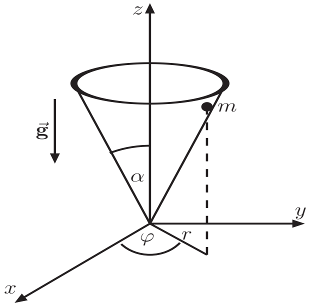
$$
\begin{aligned}
(\vec{v} \times \vec{B})_i &= \varepsilon_{ijk}\dot{x}_j B_k = \varepsilon_{ijk}\dot{x}_j(\vec{\nabla} \times \vec{A})_k = \dot{x}_j \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn}\frac{\partial A_n}{\partial x_m} \\
&= \dot{x}_j\left(\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}\right)\frac{\partial A_n}{\partial x_m} \\
&= \dot{x}_j\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right),
\end{aligned}
$$

gdzie wykorzystaliśmy udowodnione wcześniej własności tensora antysymetrycznego

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn} = \varepsilon_{kij}\varepsilon_{kmn} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm} \; .$$

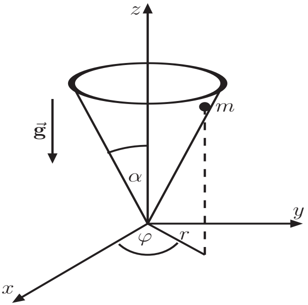
Zilustrujmy zastosowanie równań Lagrange'a II rodzaju na rozpatrywanych wcześniej przykładach.

Przykład 2: Punkt materialny o masie m porusza się po wewnętrznej powierzchni stożka o kącie półrozwartości α.



Zilustrujmy zastosowanie równań Lagrange'a II rodzaju na rozpatrywanych wcześniej przykładach.

Przykład 2: Punkt materialny o masie *m* porusza się po wewnętrznej powierzchni stożka o kącie półrozwartości α.

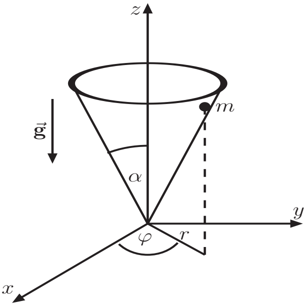


Funkcja Lagrange'a ma postać

$$L = T - V$$

Zilustrujmy zastosowanie równań Lagrange'a II rodzaju na rozpatrywanych wcześniej przykładach.

Przykład 2: Punkt materialny o masie m porusza się po wewnętrznej powierzchni stożka o kącie półrozwartości α.

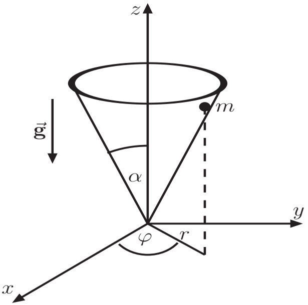


Funkcja Lagrange'a ma postać

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - mgz$$

Zilustrujmy zastosowanie równań Lagrange'a II rodzaju na rozpatrywanych wcześniej przykładach.

Przykład 2: Punkt materialny o masie m porusza się po wewnętrznej powierzchni stożka o kącie półrozwartości α.

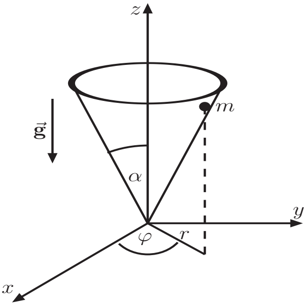


Funkcja Lagrange'a ma postać

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - mgz$$
$$=$$

Zilustrujmy zastosowanie równań Lagrange'a II rodzaju na rozpatrywanych wcześniej przykładach.

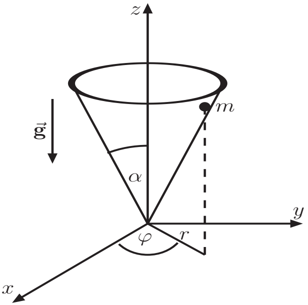
Przykład 2: Punkt materialny o masie m porusza się po wewnętrznej powierzchni stożka o kącie półrozwartości α.



Funkcja Lagrange'a ma postać

$$
\begin{aligned}
L &= T - V = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - mgz \\
&= \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \right) - mgz,
\end{aligned}
$$

Zilustrujmy zastosowanie równań Lagrange'a II rodzaju na rozpatrywanych wcześniej przykładach.
Przykład 2: Punkt materialny o masie m porusza się po wewnętrznej powierzchni stożka o kącie półrozwartości α.



Funkcja Lagrange'a ma postać

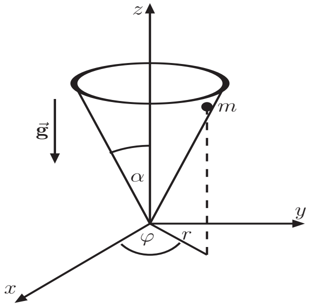
$$\begin{aligned} L &= T - V = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - mgz \\ &= \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \right) - mgz, \end{aligned}$$

a równanie więzów ma postać

$$z = r \operatorname{ctg} \alpha \; .$$

Zilustrujmy zastosowanie równań Lagrange'a II rodzaju na rozpatrywanych wcześniej przykładach.

Przykład 2: Punkt materialny o masie m porusza się po wewnętrznej powierzchni stożka o kącie półrozwartości α.



Funkcja Lagrange'a ma postać

$$\begin{aligned} L &= T - V = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - mgz \\ &= \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - mgz, \end{aligned}$$

a równanie więzów ma postać

$$z = r \operatorname{ctg} \alpha \, .$$

Użyjmy współrzędnych cylindrycznych

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & r\cos\varphi, \\ y & = & r\sin\varphi, \\ z & = & r\operatorname{ctg}\alpha, \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \dot{x} \\ \\ \\ \end{array}\right.$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Użyjmy współrzędnych cylindrycznych

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & r\cos\varphi, \\ y & = & r\sin\varphi, \\ z & = & r\,\mathrm{ctg}\,\alpha, \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcl} \dot{x} & = & \\ & & \\ & & \end{array}\right.$$

Użyjmy współrzędnych cylindrycznych

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & r\cos\varphi, \\ y & = & r\sin\varphi, \\ z & = & r\operatorname{ctg}\alpha, \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \dot{x} & = & \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi, \\ & & \\ & & \end{array}\right.$$

Użyjmy współrzędnych cylindrycznych

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & r\cos\varphi, \\ y & = & r\sin\varphi, \\ z & = & r\,\mathrm{ctg}\,\alpha, \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcl} \dot{x} & = & \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi, \\ \dot{y} & & \\ & & \end{array}\right.$$

Użyjmy współrzędnych cylindrycznych

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = r\operatorname{ctg}\alpha, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi, \\ \dot{y} = \\ \end{cases}$$

Użyjmy współrzędnych cylindrycznych

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = r\,\mathrm{ctg}\,\alpha, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi, \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi, \\ \end{cases}$$

Użyjmy współrzędnych cylindrycznych

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & r\cos\varphi, \\ y & = & r\sin\varphi, \\ z & = & r\,\mathrm{ctg}\,\alpha, \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcl} \dot{x} & = & \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi, \\ \dot{y} & = & \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi, \\ \dot{z} & & \end{array}\right.$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Użyjmy współrzędnych cylindrycznych

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = r\,\mathrm{ctg}\,\alpha, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi, \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi, \\ \dot{z} = \end{cases}$$

Użyjmy współrzędnych cylindrycznych

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = r\,\mathrm{ctg}\,\alpha, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi, \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi, \\ \dot{z} = \dot{r}\,\mathrm{ctg}\,\alpha. \end{cases}$$

Użyjmy współrzędnych cylindrycznych

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = r\,\mathrm{ctg}\,\alpha, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi, \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi, \\ \dot{z} = \dot{r}\,\mathrm{ctg}\,\alpha. \end{cases}$$

Wstawmy te wzory do funkcji Lagrange'a $L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - mgz$. Podnosząc do kwadratu wzory na $\dot{x}$, $\dot{y}$ i $\dot{z}$ i przegrupowując wyrazy otrzymamy

Równania Lagrange'a II rodzaju

Użyjmy współrzędnych cylindrycznych

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = r\,\mathrm{ctg}\,\alpha, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi, \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi, \\ \dot{z} = \dot{r}\,\mathrm{ctg}\,\alpha. \end{cases}$$

Wstawmy te wzory do funkcji Lagrange'a $L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - mgz$. Podnosząc do kwadratu wzory na $\dot{x}$, $\dot{y}$ i $\dot{z}$ i przegrupowując wyrazy otrzymamy

$$\begin{aligned} L = {} & \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi + \mathrm{ctg}^2\,\alpha\right) + r^2\dot{\varphi}^2\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)\right. \\ & \left. - 2\dot{r}r\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\varphi + 2\dot{r}r\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\varphi\right] - mgr\,\mathrm{ctg}\,\alpha \end{aligned}$$

Użyjmy współrzędnych cylindrycznych

$$\begin{cases} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi, \\ z &= r\,\mathrm{ctg}\,\alpha, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x} &= \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi, \\ \dot{y} &= \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi, \\ \dot{z} &= \dot{r}\,\mathrm{ctg}\,\alpha. \end{cases}$$

Wstawmy te wzory do funkcji Lagrange'a $L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - mgz$. Podnosząc do kwadratu wzory na $\dot{x}$, $\dot{y}$ i $\dot{z}$ i przegrupowując wyrazy otrzymamy

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi + \mathrm{ctg}^2\,\alpha\right) + r^2\dot{\varphi}^2\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)\right. \\ &\quad \left. - 2\dot{r}r\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\varphi + 2\dot{r}r\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\varphi\right] - mgr\,\mathrm{ctg}\,\alpha \\ &= \end{aligned}$$

Użyjmy współrzędnych cylindrycznych

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & r\cos\varphi, \\ y & = & r\sin\varphi, \\ z & = & r\,\mathrm{ctg}\,\alpha, \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcl} \dot{x} & = & \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi, \\ \dot{y} & = & \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi, \\ \dot{z} & = & \dot{r}\,\mathrm{ctg}\,\alpha. \end{array}\right.$$

Wstawmy te wzory do funkcji Lagrange'a $L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - mgz$. Podnosząc do kwadratu wzory na $\dot{x}$, $\dot{y}$ i $\dot{z}$ i przegrupowując wyrazy otrzymamy

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi + \mathrm{ctg}^2\,\alpha\right) + r^2\dot{\varphi}^2\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)\right. \\ &\quad \left. - 2\dot{r}r\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\varphi + 2\dot{r}r\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\varphi\right] - mgr\,\mathrm{ctg}\,\alpha \\ &= \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2\left(1 + \mathrm{ctg}^2\,\alpha\right) + r^2\dot{\varphi}^2\right] - mgr\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,. \end{aligned}$$

Użyjmy współrzędnych cylindrycznych

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = r\,\mathrm{ctg}\,\alpha, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi, \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi, \\ \dot{z} = \dot{r}\,\mathrm{ctg}\,\alpha. \end{cases}$$

Wstawmy te wzory do funkcji Lagrange'a $L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - mgz$. Podnosząc do kwadratu wzory na $\dot{x}$, $\dot{y}$ i $\dot{z}$ i przegrupowując wyrazy otrzymamy

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi + \mathrm{ctg}^2\,\alpha\right) + r^2\dot{\varphi}^2\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)\right. \\ &\quad \left. - 2\dot{r}r\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\varphi + 2\dot{r}r\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\varphi\right] - mgr\,\mathrm{ctg}\,\alpha \\ &= \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2\left(1 + \mathrm{ctg}^2\,\alpha\right) + r^2\dot{\varphi}^2\right] - mgr\,\mathrm{ctg}\,\alpha\ . \end{aligned}$$

Równania Lagrange'a II rodzaju dla niezależnych współrzędnych cylindrycznych r i φ mają postać

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \, .$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Równania Lagrange'a II rodzaju dla niezależnych współrzędnych cylindrycznych r i φ mają postać

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \,.$$

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2} m \left[\dot{r}^2 \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha\right) + r^2 \dot{\varphi}^2\right] - mgr \operatorname{ctg} \alpha$$

potrzebne w pierwszym równaniu

Równania Lagrange'a II rodzaju dla niezależnych współrzędnych cylindrycznych r i φ mają postać

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0\,.$$

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2\left(1+\operatorname{ctg}^2\alpha\right) + r^2\dot{\varphi}^2\right] - mgr\operatorname{ctg}\alpha$$

potrzebne w pierwszym równaniu

$$\frac{\partial L}{\partial r}$$

Równania Lagrange'a II rodzaju dla niezależnych współrzędnych cylindrycznych r i φ mają postać

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \, .$$

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2\left(1+\operatorname{ctg}^2\alpha\right)+r^2\dot{\varphi}^2\right] - mgr\operatorname{ctg}\alpha$$

potrzebne w pierwszym równaniu

$$\frac{\partial L}{\partial r} =$$

Równania Lagrange'a II rodzaju dla niezależnych współrzędnych cylindrycznych r i φ mają postać

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0\ .$$

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2\left(1+\mathrm{ctg}^2\,\alpha\right) + r^2\dot{\varphi}^2\right] - mgr\,\mathrm{ctg}\,\alpha$$

potrzebne w pierwszym równaniu

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2 - mg\,\mathrm{ctg}\,\alpha,$$

Równania Lagrange'a II rodzaju dla niezależnych współrzędnych cylindrycznych r i φ mają postać

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 .$$

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2} m \left[\dot{r}^2 \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha\right) + r^2 \dot{\varphi}^2\right] - mgr \operatorname{ctg} \alpha$$

potrzebne w pierwszym równaniu

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2 - mg \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}$$

Równania Lagrange'a II rodzaju dla niezależnych współrzędnych cylindrycznych r i φ mają postać

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0\,.$$

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2\left(1+\operatorname{ctg}^2\alpha\right) + r^2\dot{\varphi}^2\right] - mgr\operatorname{ctg}\alpha$$

potrzebne w pierwszym równaniu

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial r} &= mr\dot{\varphi}^2 - mg\operatorname{ctg}\alpha,\\ \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &=\end{aligned}$$

Równania Lagrange'a II rodzaju dla niezależnych współrzędnych cylindrycznych r i φ mają postać

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0\ .$$

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2\left(1 + \operatorname{ctg}^2\alpha\right) + r^2\dot{\varphi}^2\right] - mgr\operatorname{ctg}\alpha$$

potrzebne w pierwszym równaniu

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial r} &= mr\dot{\varphi}^2 - mg\operatorname{ctg}\alpha,\\ \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= m\dot{r}\left(1 + \operatorname{ctg}^2\alpha\right)\end{aligned}$$

Równania Lagrange'a II rodzaju dla niezależnych współrzędnych cylindrycznych r i φ mają postać

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \,.$$

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2\left(1+\operatorname{ctg}^2\alpha\right) + r^2\dot{\varphi}^2\right] - mgr\operatorname{ctg}\alpha$$

potrzebne w pierwszym równaniu

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial r} &= mr\dot{\varphi}^2 - mg\operatorname{ctg}\alpha, \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= m\dot{r}\left(1+\operatorname{ctg}^2\alpha\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r}\left(1+\operatorname{ctg}^2\alpha\right),
\end{aligned}$$

Równania Lagrange'a II rodzaju dla niezależnych współrzędnych cylindrycznych r i φ mają postać

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \, .$$

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2} m \left[\dot{r}^2 \left(1 + \mathrm{ctg}^2\, \alpha \right) + r^2 \dot{\varphi}^2 \right] - mgr\, \mathrm{ctg}\, \alpha$$

potrzebne w pierwszym równaniu

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial r} &= m r \dot{\varphi}^2 - mg\, \mathrm{ctg}\, \alpha, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= m \dot{r} \left(1 + \mathrm{ctg}^2\, \alpha \right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \ddot{r} \left(1 + \mathrm{ctg}^2\, \alpha \right), \end{aligned}$$

a następnie obliczmy różnicę

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = m\ddot{r}\left(1 + \operatorname{ctg}^2\alpha\right) - mr\dot{\varphi}^2 + mg\operatorname{ctg}\alpha = 0\ .$$

a następnie obliczmy różnicę

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = m\ddot{r}\left(1 + \operatorname{ctg}^2\alpha\right) - mr\dot{\varphi}^2 + mg\operatorname{ctg}\alpha = 0\ .$$

Po przedzieleniu przez m i pomnożeniu przez $\operatorname{tg}\alpha$ równanie to przyjmuje postać

$$\ddot{r}\left(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha\right) - r\dot{\varphi}^2\operatorname{tg}\alpha + g = 0.$$

a następnie obliczmy różnicę

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = m\ddot{r}\left(1 + \mathrm{ctg}^2\,\alpha\right) - mr\dot{\varphi}^2 + mg\,\mathrm{ctg}\,\alpha = 0\ .$$

Po przedzieleniu przez m i pomnożeniu przez $\mathrm{tg}\,\alpha$ równanie to przyjmuje postać

$$\ddot{r}\,(\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\alpha) - r\dot{\varphi}^2\,\mathrm{tg}\,\alpha + g = 0.$$

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2\left(1+\operatorname{ctg}^2\alpha\right)+r^2\dot{\varphi}^2\right] - mgr\operatorname{ctg}\alpha$$

potrzebne w drugim równaniu

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0,$$

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2} m \left[\dot{r}^2 \left(1 + \mathrm{ctg}^2\, \alpha \right) + r^2 \dot{\varphi}^2 \right] - mgr\, \mathrm{ctg}\, \alpha$$

potrzebne w drugim równaniu

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}$$

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2} m \left[\dot{r}^2 \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha \right) + r^2 \dot{\varphi}^2 \right] - mgr \operatorname{ctg} \alpha$$

potrzebne w drugim równaniu

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \quad =$$

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2} m \left[\dot{r}^2 \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha \right) + r^2 \dot{\varphi}^2 \right] - mgr \operatorname{ctg} \alpha$$

potrzebne w drugim równaniu

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi}$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2} m \left[\dot{r}^2 \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha \right) + r^2 \dot{\varphi}^2 \right] - mgr \operatorname{ctg} \alpha$$

potrzebne w drugim równaniu

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 2mr\dot{r}\dot{\varphi} + mr^2 \ddot{\varphi},$$

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2} m \left[\dot{r}^2 \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha \right) + r^2 \dot{\varphi}^2 \right] - mgr \operatorname{ctg} \alpha$$

potrzebne w drugim równaniu

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \quad = \quad mr^2 \dot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 2mr\dot{r}\dot{\varphi} + mr^2 \ddot{\varphi},$$

a więc otrzymujemy równanie

$$2mr\dot{r}\dot{\varphi} + mr^2 \ddot{\varphi} = 0.$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2} m \left[\dot{r}^2 \left(1 + \mathrm{ctg}^2\, \alpha \right) + r^2 \dot{\varphi}^2 \right] - mgr\, \mathrm{ctg}\, \alpha$$

potrzebne w drugim równaniu

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 2mr\dot{r}\dot{\varphi} + mr^2 \ddot{\varphi},$$

a więc otrzymujemy równanie

$$2mr\dot{r}\dot{\varphi} + mr^2 \ddot{\varphi} = 0.$$

Dzieląc obustronnie przez m otrzymamy

$$r \left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} \right) = 0.$$

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2} m \left[\dot{r}^2 \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha \right) + r^2 \dot{\varphi}^2 \right] - mgr \operatorname{ctg} \alpha$$

potrzebne w drugim równaniu

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 2mr\dot{r}\dot{\varphi} + mr^2 \ddot{\varphi},$$

a więc otrzymujemy równanie

$$2mr\dot{r}\dot{\varphi} + mr^2 \ddot{\varphi} = 0.$$

Dzieląc obustronnie przez m otrzymamy

$$r \left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} \right) = 0.$$

Ponieważ przypadek $r = 0$ jest nieciekawy fizycznie, ostatecznie otrzymujemy drugie równanie w formie

$$2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0.$$

Ponieważ przypadek $r = 0$ jest nieciekawy fizycznie, ostatecznie otrzymujemy drugie równanie w formie

$$2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0.$$

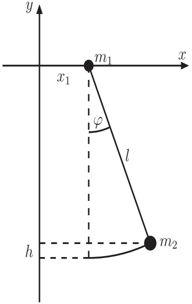
Otrzymaliśmy dokładnie takie same równania ruchu dla punktu na powierzchni stożka, jak wówczas gdy startowaliśmy z równania d'Alemberta, czy z równania Newtona, uzupełnionego o założenia co do natury sił reakcji więzów.

Ponieważ przypadek $r = 0$ jest nieciekawy fizycznie, ostatecznie otrzymujemy drugie równanie w formie

$$2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0.$$

Otrzymaliśmy dokładnie takie same równania ruchu dla punktu na powierzchni stożka, jak wówczas gdy startowaliśmy z równania d'Alemberta, czy z równania Newtona, uzupełnionego o założenia co do natury sił reakcji więzów.

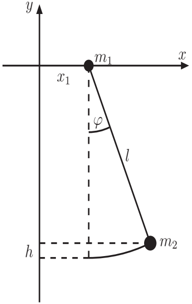
Przykład 3: Wychodząc z równań Lagrange'a II rodzaju wyprowadzić równania ruchu dla wahadła matematycznego z punktem zawieszenia swobodnie ślizgającym się po osi Ox.



Funkcja Lagrange'a ma postać

$$L = T - V$$

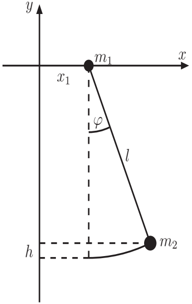
Przykład 3: Wychodząc z równań Lagrange'a II rodzaju wyprowadzić równania ruchu dla wahadła matematycznego z punktem zawieszenia swobodnie ślizgającym się po osi Ox.



Funkcja Lagrange'a ma postać

$$L = T - V = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2^{\,2} - m_1 g l - m_2 g h$$

Przykład 3: Wychodząc z równań Lagrange'a II rodzaju wyprowadzić równania ruchu dla wahadła matematycznego z punktem zawieszenia swobodnie ślizgającym się po osi Ox.

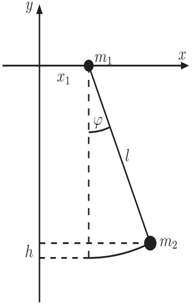


Funkcja Lagrange'a ma postać

$$L = T - V = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2^2 - m_1gl - m_2gh$$

$$=$$

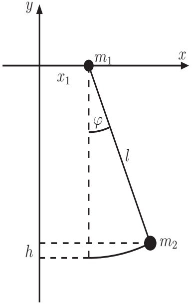
Przykład 3: Wychodząc z równań Lagrange'a II rodzaju wyprowadzić równania ruchu dla wahadła matematycznego z punktem zawieszenia swobodnie ślizgającym się po osi Ox.



Funkcja Lagrange'a ma postać

$$
\begin{aligned}
L &= T - V = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^{\,2} - m_1 g l - m_2 g h \\
&= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 \right) - m_1 g l - m_2 g h,
\end{aligned}
$$

Przykład 3: Wychodząc z równań Lagrange'a II rodzaju wyprowadzić równania ruchu dla wahadła matematycznego z punktem zawieszenia swobodnie ślizgającym się po osi Ox.

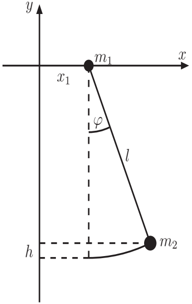


Funkcja Lagrange'a ma postać

$$\begin{aligned} L &= T - V = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^2 - m_1 g l - m_2 g h \\ &= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 \right) - m_1 g l - m_2 g h, \end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy już warunek więzów $y_1 = 0$.

Przykład 3: Wychodząc z równań Lagrange'a II rodzaju wyprowadzić równania ruchu dla wahadła matematycznego z punktem zawieszenia swobodnie ślizgającym się po osi Ox.

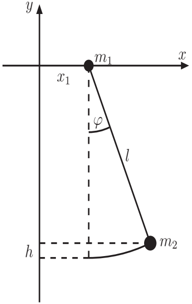


Funkcja Lagrange'a ma postać

$$\begin{aligned} L &= T - V = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2^{\,2} - m_1 gl - m_2 gh \\ &= \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) - m_1 gl - m_2 gh, \end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy już warunek więzów $y_1 = 0$. Zauważmy, że jako poziom odniesienia dla energii potencjalnej wybraliśmy najniższe położenie punktu o masie m_2, odpowiadające $y_2 = -l$. Wysokość punktu o masie m_1 jest stała i wynosi l, a wysokość punktu o masie m_2 wyraża się wzorem $h = l - l\cos\varphi$.

Przykład 3: Wychodząc z równań Lagrange'a II rodzaju wyprowadzić równania ruchu dla wahadła matematycznego z punktem zawieszenia swobodnie ślizgającym się po osi Ox.



Funkcja Lagrange'a ma postać

$$\begin{aligned} L &= T - V = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^{\,2} - m_1 g l - m_2 g h \\ &= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 \right) - m_1 g l - m_2 g h, \end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy już warunek więzów $y_1 = 0$. Zauważmy, że jako poziom odniesienia dla energii potencjalnej wybraliśmy najniższe położenie punktu o masie m_2, odpowiadające $y_2 = -l$. Wysokość punktu o masie m_1 jest stała i wynosi l, a wysokość punktu o masie m_2 wyraża się wzorem $h = l - l \cos \varphi$.

Uwzględniając ten fakt otrzymamy

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) - m_1gl - m_2gl + m_2gl\cos\varphi.$$

Wyrazy $-m_1gl - m_2gl$ w funkcji Lagrange'a są stałe, a zatem nie mają żadnego wpływu na równania ruchu, które zawierają tylko pochodne L.

Uwzględniając ten fakt otrzymamy

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 \right) - m_1 g l - m_2 g l + m_2 g l \cos\varphi .$$

Wyrazy $-m_1 g l - m_2 g l$ w funkcji Lagrange'a są stałe, a zatem nie mają żadnego wpływu na równania ruchu, które zawierają tylko pochodne L. Dlatego możemy je pominąć i rozpatrywać funkcję Lagrange'a postaci

Uwzględniając ten fakt otrzymamy

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) - m_1 gl - m_2 gl + m_2 gl\cos\varphi.$$

Wyrazy $-m_1 gl - m_2 gl$ w funkcji Lagrange'a są stałe, a zatem nie mają żadnego wpływu na równania ruchu, które zawierają tylko pochodne L. Dlatego możemy je pominąć i rozpatrywać funkcję Lagrange'a postaci

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) + m_2 gl\cos\varphi\ .$$

Uwzględniając ten fakt otrzymamy

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 \right) - m_1 g l - m_2 g l + m_2 g l \cos\varphi.$$

Wyrazy $-m_1 gl - m_2 gl$ w funkcji Lagrange'a są stałe, a zatem nie mają żadnego wpływu na równania ruchu, które zawierają tylko pochodne L. Dlatego możemy je pominąć i rozpatrywać funkcję Lagrange'a postaci

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 \right) + m_2 g l \cos\varphi \ .$$

Dowolność wyboru stałej w funkcji Lagrange'a, wiąże się w tym przypadku bezpośrednio z dowolnością wyboru poziomu, względem którego określamy energię potencjalną V.

Uwzględniając ten fakt otrzymamy

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 \right) - m_1 g l - m_2 g l + m_2 g l \cos\varphi .$$

Wyrazy $-m_1 g l - m_2 g l$ w funkcji Lagrange'a są stałe, a zatem nie mają żadnego wpływu na równania ruchu, które zawierają tylko pochodne L. Dlatego możemy je pominąć i rozpatrywać funkcję Lagrange'a postaci

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 \right) + m_2 g l \cos\varphi\ .$$

Dowolność wyboru stałej w funkcji Lagrange'a, wiąże się w tym przypadku bezpośrednio z dowolnością wyboru poziomu, względem którego określamy energię potencjlną V.

Równania Lagrange'a II rodzaju

Skorzystajmy z wzorów transformacyjnych

$$x_2 = x_1 + l \sin\varphi \qquad \Rightarrow$$

Skorzystajmy z wzorów transformacyjnych

$$x_2 = x_1 + l \sin \varphi \qquad \Rightarrow \qquad \dot{x}_2 = \dot{x}_1 + l \dot{\varphi} \cos \varphi,$$

Skorzystajmy z wzorów transformacyjnych

$$x_2 = x_1 + l\sin\varphi \qquad \Rightarrow \qquad \dot{x}_2 = \dot{x}_1 + l\dot{\varphi}\cos\varphi,$$
$$y_2 = -l\cos\varphi$$

Skorzystajmy z wzorów transformacyjnych

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + l\sin\varphi & \Rightarrow \quad & \dot{x}_2 = \dot{x}_1 + l\dot{\varphi}\cos\varphi, \\ y_2 &= -l\cos\varphi & \Rightarrow \quad & \end{aligned}$$

Skorzystajmy z wzorów transformacyjnych

$$x_2 = x_1 + l\sin\varphi \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_2 = \dot{x}_1 + l\dot{\varphi}\cos\varphi,$$
$$y_2 = -l\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \dot{y}_2 = l\dot{\varphi}\sin\varphi.$$

Skorzystajmy z wzorów transformacyjnych

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + l\sin\varphi & \Rightarrow \quad & \dot{x}_2 = \dot{x}_1 + l\dot{\varphi}\cos\varphi, \\ y_2 &= -l\cos\varphi & \Rightarrow \quad & \dot{y}_2 = l\dot{\varphi}\sin\varphi. \end{aligned}$$

i wstawmy odpowiednie pochodne do wzoru na L

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) + m_2 gl\cos\varphi \ .$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Skorzystajmy z wzorów transformacyjnych

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + l \sin\varphi & \Rightarrow \quad & \dot{x}_2 = \dot{x}_1 + l\dot{\varphi}\cos\varphi, \\ y_2 &= -l\cos\varphi & \Rightarrow \quad & \dot{y}_2 = l\dot{\varphi}\sin\varphi. \end{aligned}$$

i wstawmy odpowiednie pochodne do wzoru na L

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) + m_2 g l \cos\varphi \; .$$

Po uporządkowaniu i skorzystaniu z jedynki trygonometrycznej otrzymamy

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\,\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}_1\dot{\varphi}\cos\varphi\right) + m_2 g l \cos\varphi \; .$$

Skorzystajmy z wzorów transformacyjnych

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + l\sin\varphi &\Rightarrow&\quad \dot{x}_2 = \dot{x}_1 + l\dot{\varphi}\cos\varphi, \\ y_2 &= -l\cos\varphi &\Rightarrow&\quad \dot{y}_2 = l\dot{\varphi}\sin\varphi. \end{aligned}$$

i wstawmy odpowiednie pochodne do wzoru na L

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) + m_2 g l\cos\varphi\ .$$

Po uporządkowaniu i skorzystaniu z jedynki trygonometrycznej otrzymamy

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\,\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}_1\dot{\varphi}\cos\varphi\right) + m_2 g l\cos\varphi\ .$$

Równania Lagrange'a II rodzaju dla niezależnych współrzędnych x_1 i φ mają postać

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0\,.$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Równania Lagrange'a II rodzaju dla niezależnych współrzędnych x_1 i φ mają postać

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0\,.$$

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}_1\dot{\varphi}\cos\varphi\right) + m_2 g l\cos\varphi$$

potrzebne w pierwszym równaniu

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0,$$

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}_1\dot{\varphi}\cos\varphi\right) + m_2 gl\cos\varphi$$

potrzebne w pierwszym równaniu

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\,\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}_1\dot{\varphi}\cos\varphi\right) + m_2 g l \cos\varphi$$

potrzebne w pierwszym równaniu

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \quad =$$

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\,\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}_1\dot{\varphi}\cos\varphi\right) + m_2 gl\cos\varphi$$

potrzebne w pierwszym równaniu

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = (m_1 + m_2)\dot{x}_1 + m_2 l\dot{\varphi}\cos\varphi$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\,\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}_1\dot{\varphi}\cos\varphi\right) + m_2 g l\cos\varphi$$

potrzebne w pierwszym równaniu

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = (m_1 + m_2)\dot{x}_1 + m_2 l\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}$$

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}_1\dot{\varphi}\cos\varphi\right) + m_2 g l\cos\varphi$$

potrzebne w pierwszym równaniu

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = (m_1 + m_2)\dot{x}_1 + m_2 l\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} =$$

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}_1\dot{\varphi}\cos\varphi\right) + m_2 gl\cos\varphi$$

potrzebne w pierwszym równaniu

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = (m_1 + m_2)\dot{x}_1 + m_2 l\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = (m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + m_2 l\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right),$$

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}_1\dot{\varphi}\cos\varphi\right) + m_2 gl\cos\varphi$$

potrzebne w pierwszym równaniu

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = (m_1 + m_2)\dot{x}_1 + m_2 l\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = (m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + m_2 l\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right),$$

a zatem pierwsze równanie ma postać

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial L}{\partial x_1} = (m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + m_2 l\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right) = 0.$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}_1\dot{\varphi}\cos\varphi\right) + m_2 g l\cos\varphi$$

potrzebne w pierwszym równaniu

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = (m_1 + m_2)\dot{x}_1 + m_2 l\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = (m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + m_2 l\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right),$$

a zatem pierwsze równanie ma postać

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial L}{\partial x_1} = (m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + m_2 l\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right) = 0.$$

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}_1\dot{\varphi}\cos\varphi\right) + m_2 gl\cos\varphi$$

występujące w drugim równaniu

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} =$$

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}_1\dot{\varphi}\cos\varphi\right) + m_2 gl\cos\varphi$$

występujące w drugim równaniu

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m_2 l\dot{x}_1\dot{\varphi}\sin\varphi - m_2 gl\sin\varphi,$$

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}_1\dot{\varphi}\cos\varphi\right) + m_2 gl\cos\varphi$$

występujące w drugim równaniu

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m_2 l\dot{x}_1\dot{\varphi}\sin\varphi - m_2 gl\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}_1\dot{\varphi}\cos\varphi\right) + m_2 gl\cos\varphi$$

występujące w drugim równaniu

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \varphi} &= -m_2 l\dot{x}_1\dot{\varphi}\sin\varphi - m_2 gl\sin\varphi,\\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &=\end{aligned}$$

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}_1\dot{\varphi}\cos\varphi\right) + m_2 gl\cos\varphi$$

występujące w drugim równaniu

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= -m_2 l\dot{x}_1\dot{\varphi}\sin\varphi - m_2 gl\sin\varphi, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= m_2 l^2\dot{\varphi} + m_2 l\dot{x}_1\cos\varphi, \end{aligned}$$

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}_1\dot{\varphi}\cos\varphi\right) + m_2 gl\cos\varphi$$

występujące w drugim równaniu

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \varphi} &= -m_2 l\dot{x}_1\dot{\varphi}\sin\varphi - m_2 gl\sin\varphi,\\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= m_2 l^2\dot{\varphi} + m_2 l\dot{x}_1\cos\varphi,\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &
\end{aligned}$$

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}_1\dot{\varphi}\cos\varphi\right) + m_2 gl\cos\varphi$$

występujące w drugim równaniu

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= -m_2 l\dot{x}_1\dot{\varphi}\sin\varphi - m_2 gl\sin\varphi, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= m_2 l^2\dot{\varphi} + m_2 l\dot{x}_1\cos\varphi, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= \end{aligned}$$

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}_1\dot{\varphi}\cos\varphi\right) + m_2 gl\cos\varphi$$

występujące w drugim równaniu

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \varphi} &= -m_2 l\dot{x}_1\dot{\varphi}\sin\varphi - m_2 gl\sin\varphi,\\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= m_2 l^2\dot{\varphi} + m_2 l\dot{x}_1\cos\varphi,\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= m_2 l^2\ddot{\varphi} + m_2 l\left(\ddot{x}_1\cos\varphi - \dot{x}_1\dot{\varphi}\sin\varphi\right),
\end{aligned}$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}_1\dot{\varphi}\cos\varphi\right) + m_2 gl\cos\varphi$$

występujące w drugim równaniu

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \varphi} &= -m_2 l\dot{x}_1\dot{\varphi}\sin\varphi - m_2 gl\sin\varphi, \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= m_2 l^2\dot{\varphi} + m_2 l\dot{x}_1\cos\varphi, \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= m_2 l^2\ddot{\varphi} + m_2 l\left(\ddot{x}_1\cos\varphi - \dot{x}_1\dot{\varphi}\sin\varphi\right),
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi}$$

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}_1\dot{\varphi}\cos\varphi\right) + m_2 gl\cos\varphi$$

występujące w drugim równaniu

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= -m_2 l\dot{x}_1\dot{\varphi}\sin\varphi - m_2 gl\sin\varphi, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= m_2 l^2\dot{\varphi} + m_2 l\dot{x}_1\cos\varphi, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= m_2 l^2\ddot{\varphi} + m_2 l\left(\ddot{x}_1\cos\varphi - \dot{x}_1\dot{\varphi}\sin\varphi\right), \\ \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= \end{aligned}$$

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}_1\dot{\varphi}\cos\varphi\right) + m_2 gl\cos\varphi$$

występujące w drugim równaniu

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \varphi} &= -m_2 l\dot{x}_1\dot{\varphi}\sin\varphi - m_2 gl\sin\varphi,\\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= m_2 l^2\dot{\varphi} + m_2 l\dot{x}_1\cos\varphi,\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= m_2 l^2\ddot{\varphi} + m_2 l\left(\ddot{x}_1\cos\varphi - \dot{x}_1\dot{\varphi}\sin\varphi\right),\\
\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= m_2 l^2\ddot{\varphi} + m_2 l\left(\ddot{x}_1\cos\varphi - \dot{x}_1\dot{\varphi}\sin\varphi\right)
\end{aligned}$$

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}_1\dot{\varphi}\cos\varphi\right) + m_2 g l\cos\varphi$$

występujące w drugim równaniu

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \varphi} &= -m_2 l\dot{x}_1\dot{\varphi}\sin\varphi - m_2 g l\sin\varphi, \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= m_2 l^2\dot{\varphi} + m_2 l\dot{x}_1\cos\varphi, \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= m_2 l^2\ddot{\varphi} + m_2 l\left(\ddot{x}_1\cos\varphi - \dot{x}_1\dot{\varphi}\sin\varphi\right), \\
\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= m_2 l^2\ddot{\varphi} + m_2 l\left(\ddot{x}_1\cos\varphi - \dot{x}_1\dot{\varphi}\sin\varphi\right) \\
&+
\end{aligned}$$

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}_1\dot{\varphi}\cos\varphi\right) + m_2 gl\cos\varphi$$

występujące w drugim równaniu

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \varphi} &= -m_2 l\dot{x}_1\dot{\varphi}\sin\varphi - m_2 gl\sin\varphi, \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= m_2 l^2\dot{\varphi} + m_2 l\dot{x}_1\cos\varphi, \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= m_2 l^2\ddot{\varphi} + m_2 l\left(\ddot{x}_1\cos\varphi - \dot{x}_1\dot{\varphi}\sin\varphi\right), \\
\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= m_2 l^2\ddot{\varphi} + m_2 l\left(\ddot{x}_1\cos\varphi - \dot{x}_1\dot{\varphi}\sin\varphi\right) \\
&+ m_2 l\dot{x}_1\dot{\varphi}\sin\varphi + m_2 gl\sin\varphi = 0\,.
\end{aligned}$$

Obliczmy pochodne funkcji Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}_1\dot{\varphi}\cos\varphi\right) + m_2 gl\cos\varphi$$

występujące w drugim równaniu

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \varphi} &= -m_2 l\dot{x}_1\dot{\varphi}\sin\varphi - m_2 gl\sin\varphi, \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= m_2 l^2\dot{\varphi} + m_2 l\dot{x}_1\cos\varphi, \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= m_2 l^2\ddot{\varphi} + m_2 l\left(\ddot{x}_1\cos\varphi - \dot{x}_1\dot{\varphi}\sin\varphi\right), \\
\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= m_2 l^2\ddot{\varphi} + m_2 l\left(\ddot{x}_1\cos\varphi - \dot{x}_1\dot{\varphi}\sin\varphi\right) \\
&+ m_2 l\dot{x}_1\dot{\varphi}\sin\varphi + m_2 gl\sin\varphi = 0\,.
\end{aligned}$$

Uporządkujmy ostatnie równanie w kolorze niebieskim

$$m_2 l^2 \ddot{\varphi} + m_2 l \ddot{x}_1 \cos\varphi + m_2 g l \sin\varphi = 0$$

i podzielmy obustronnie przez $m_2 l$,

Uporządkujmy ostatnie równanie w kolorze niebieskim

$$m_2 l^2 \ddot{\varphi} + m_2 l \ddot{x}_1 \cos\varphi + m_2 g l \sin\varphi = 0$$

i podzielmy obustronnie przez $m_2 l$, wówczas otrzymamy ostateczną postać drugiego równania ruchu wahadła z punktem zawieszenia swobodnie ślizgającym się po osi Ox:

$$l\ddot{\varphi} + \ddot{x}_1 \cos\varphi + g \sin\varphi = 0.$$

Uporządkujmy ostatnie równanie w kolorze niebieskim

$$m_2 l^2 \ddot{\varphi} + m_2 l \ddot{x}_1 \cos\varphi + m_2 g l \sin\varphi = 0$$

i podzielmy obustronnie przez $m_2 l$, wówczas otrzymamy ostateczną postać drugiego równania ruchu wahadła z punktem zawieszenia swobodnie ślizgającym się po osi Ox:

$$l\ddot{\varphi} + \ddot{x}_1 \cos\varphi + g \sin\varphi = 0.$$

Przypomnijmy pierwsze równanie

$$(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + m_2 l \left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2 \sin\varphi\right) = 0.$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Uporządkujmy ostatnie równanie w kolorze niebieskim

$$m_2 l^2 \ddot{\varphi} + m_2 l \ddot{x}_1 \cos\varphi + m_2 g l \sin\varphi = 0$$

i podzielmy obustronnie przez $m_2 l$, wówczas otrzymamy ostateczną postać drugiego równania ruchu wahadła z punktem zawieszenia swobodnie ślizgającym się po osi Ox:

$$l\ddot{\varphi} + \ddot{x}_1 \cos\varphi + g \sin\varphi = 0.$$

Przypomnijmy pierwsze równanie

$$(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + m_2 l \left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2 \sin\varphi\right) = 0.$$

Znów otrzymaliśmy dokładnie takie same równania, jak wówczas gdy startowaliśmy z równania d'Alemberta i z równań Newtona. W obu rozpatrywanych przykładach wyprowadzenie równań ruchu z równań Lagrange'a II rodzaju było jednak prostsze.

Znów otrzymaliśmy dokładnie takie same równania, jak wówczas gdy startowaliśmy z równania d'Alemberta i z równań Newtona.
W obu rozpatrywanych przykładach wyprowadzenie równań ruchu z równań Lagrange'a II rodzaju było jednak prostsze.

Transformacje punktowe

Dużą zaletą równań Lagrange'a II rodzaju jest ich niezmienniczość przy transforamcjach punktowych, czyli przy transformacjach postaci

$$q_i \to Q_i = Q_i(q_1, q_2, ..., q_n, t) \equiv Q_i(q, t), \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

Dużą zaletą równań Lagrange'a II rodzaju jest ich niezmienniczość przy transforamcjach punktowych, czyli przy transformacjach postaci

$$q_i \to Q_i = Q_i(q_1, q_2, ..., q_n, t) \equiv Q_i(q, t), \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

Tego typu transformacje mogą opisywać np. przejście od współrzędnych kartezjańskich do krzywoliniowych,

Transformacje punktowe

Dużą zaletą równań Lagrange'a II rodzaju jest ich niezmienniczość przy transforamcjach punktowych, czyli przy transformacjach postaci

$$q_i \to Q_i = Q_i(q_1, q_2, ..., q_n, t) \equiv Q_i(q, t), \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

Tego typu transformacje mogą opisywać np. przejście od współrzędnych kartezjańskich do krzywoliniowych, albo przejście do poruszającego się układu odniesienia.

Transformacje punktowe

Dużą zaletą równań Lagrange'a II rodzaju jest ich niezmienniczość przy transforamcjach punktowych, czyli przy transformacjach postaci

$$q_i \rightarrow Q_i = Q_i(q_1, q_2, ..., q_n, t) \equiv Q_i(q, t), \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

Tego typu transformacje mogą opisywać np. przejście od współrzędnych kartezjańskich do krzywoliniowych, albo przejście do poruszającego się układu odniesienia.

Transformacje punktowe

Załóżmy, że istnieją transformacje odwrotne

$$Q_i \to q_i = q_i(Q_1, Q_2, ..., Q_n, t) \equiv q_i(Q, t), \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

Obliczmy zupełną pochodną czasową transformacji odwrotnej

$$\dot{q}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \dot{Q}_j + \frac{\partial q_i}{\partial t}$$

Transformacje punktowe

Załóżmy, że istnieją transformacje odwrotne

$$Q_i \to q_i = q_i(Q_1, Q_2, ..., Q_n, t) \equiv q_i(Q, t), \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

Obliczmy zupełną pochodną czasową transformacji odwrotnej

$$\dot{q}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \, \dot{Q}_j + \frac{\partial q_i}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \dot{q}_i = \dot{q}_i(Q, \dot{Q}, t)$$

Załóżmy, że istnieją transformacje odwrotne

$$Q_i \to q_i = q_i(Q_1, Q_2, ..., Q_n, t) \equiv q_i(Q, t), \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

Obliczmy zupełną pochodną czasową transformacji odwrotnej

$$\dot{q}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j}\, \dot{Q}_j + \frac{\partial q_i}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \dot{q}_i = \dot{q}_i(Q, \dot{Q}, t)$$

i zróżniczkujmy obustronnie po $\dot{Q}_l$, wówczas otrzymamy

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_l} =$$

Transformacje punktowe

Załóżmy, że istnieją transformacje odwrotne

$$Q_i \rightarrow q_i = q_i(Q_1, Q_2, ..., Q_n, t) \equiv q_i(Q, t), \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

Obliczmy zupełną pochodną czasową transformacji odwrotnej

$$\dot{q}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \dot{Q}_j + \frac{\partial q_i}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \dot{q}_i = \dot{q}_i(Q, \dot{Q}, t)$$

i zróżniczkujmy obustronnie po $\dot{Q}_l$, wówczas otrzymamy

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_l} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial \dot{Q}_l} =$$

Załóżmy, że istnieją transformacje odwrotne

$$Q_i \to q_i = q_i(Q_1, Q_2, ..., Q_n, t) \equiv q_i(Q, t), \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

Obliczmy zupełną pochodną czasową transformacji odwrotnej

$$\dot{q}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j}\, \dot{Q}_j + \frac{\partial q_i}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \dot{q}_i = \dot{q}_i(Q, \dot{Q}, t)$$

i zróżniczkujmy obustronnie po $\dot{Q}_l$, wówczas otrzymamy

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_l} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j}\, \frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial \dot{Q}_l} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j}\, \delta_{jl}$$

Załóżmy, że istnieją transformacje odwrotne

$$Q_i \to q_i = q_i(Q_1, Q_2, ..., Q_n, t) \equiv q_i(Q, t), \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

Obliczmy zupełną pochodną czasową transformacji odwrotnej

$$\dot{q}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j}\, \dot{Q}_j + \frac{\partial q_i}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \dot{q}_i = \dot{q}_i(Q, \dot{Q}, t)$$

i zróżniczkujmy obustronnie po $\dot{Q}_l$, wówczas otrzymamy

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_l} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j}\, \frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial \dot{Q}_l} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j}\, \delta_{jl} = \frac{\partial q_i}{\partial Q_l}.$$

Załóżmy, że istnieją transformacje odwrotne

$$Q_i \to q_i = q_i(Q_1, Q_2, ..., Q_n, t) \equiv q_i(Q, t), \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

Obliczmy zupełną pochodną czasową transformacji odwrotnej

$$\dot{q}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \dot{Q}_j + \frac{\partial q_i}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \dot{q}_i = \dot{q}_i(Q, \dot{Q}, t)$$

i zróżniczkujmy obustronnie po $\dot{Q}_l$, wówczas otrzymamy

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_l} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial \dot{Q}_l} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \delta_{jl} = \frac{\partial q_i}{\partial Q_l}.$$

Wyraźmy funkcję Lagrange'a w nowych współrzędnych

$$L(q, \dot{q}, t) = L\left(q(Q, t), \dot{q}(Q, \dot{Q}, t), t\right) \equiv L'(Q, \dot{Q}, t).$$

Obliczmy pochodne funkcji $L'(Q, \dot{Q}, t)$

$$\frac{\partial L'}{\partial Q_j} =$$

Wyraźmy funkcję Lagrange'a w nowych współrzędnych

$$L(q,\dot{q},t) = L\left(q(Q,t),\dot{q}(Q,\dot{Q},t),t\right) \equiv L'(Q,\dot{Q},t).$$

Obliczmy pochodne funkcji $L'(Q,\dot{Q},t)$

$$\frac{\partial L'}{\partial Q_j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial Q_j}+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j}\right),$$

Transformacje punktowe

Wyraźmy funkcję Lagrange'a w nowych współrzędnych

$$L(q,\dot{q},t) = L\left(q(Q,t),\dot{q}(Q,\dot{Q},t),t\right) \equiv L'(Q,\dot{Q},t).$$

Obliczmy pochodne funkcji $L'(Q,\dot{Q},t)$

$$\frac{\partial L'}{\partial Q_j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial Q_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j}\right),$$

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_j}$$

Wyraźmy funkcję Lagrange'a w nowych współrzędnych

$$L(q, \dot{q}, t) = L\left(q(Q, t), \dot{q}(Q, \dot{Q}, t), t\right) \equiv L'(Q, \dot{Q}, t).$$

Obliczmy pochodne funkcji $L'(Q, \dot{Q}, t)$

$$\frac{\partial L'}{\partial Q_j} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j} \right),$$

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_j} =$$

Transformacje punktowe

Wyraźmy funkcję Lagrange'a w nowych współrzędnych

$$L(q, \dot{q}, t) = L\left(q(Q, t), \dot{q}(Q, \dot{Q}, t), t\right) \equiv L'(Q, \dot{Q}, t).$$

Obliczmy pochodne funkcji $L'(Q, \dot{Q}, t)$

$$\frac{\partial L'}{\partial Q_j} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j} \right),$$

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_j} =$$

Wyraźmy funkcję Lagrange'a w nowych współrzędnych

$$L(q, \dot{q}, t) = L\left(q(Q, t), \dot{q}(Q, \dot{Q}, t), t\right) \equiv L'(Q, \dot{Q}, t).$$

Obliczmy pochodne funkcji $L'(Q, \dot{Q}, t)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L'}{\partial Q_j} &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j} \right), \\
\frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_j} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j},
\end{aligned}$$

Wyraźmy funkcję Lagrange'a w nowych współrzędnych

$$L(q, \dot{q}, t) = L\left(q(Q, t), \dot{q}(Q, \dot{Q}, t), t\right) \equiv L'(Q, \dot{Q}, t).$$

Obliczmy pochodne funkcji $L'(Q, \dot{Q}, t)$

$$\frac{\partial L'}{\partial Q_j} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j} \right),$$

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_j}$$

Wyraźmy funkcję Lagrange'a w nowych współrzędnych

$$L(q, \dot{q}, t) = L\left(q(Q, t), \dot{q}(Q, \dot{Q}, t), t\right) \equiv L'(Q, \dot{Q}, t).$$

Obliczmy pochodne funkcji $L'(Q, \dot{Q}, t)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L'}{\partial Q_j} &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j} \right), \\
\frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_j} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j}, \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_j} &=
\end{aligned}$$

Wyraźmy funkcję Lagrange'a w nowych współrzędnych

$$L(q,\dot{q},t) = L\left(q(Q,t),\dot{q}(Q,\dot{Q},t),t\right) \equiv L'(Q,\dot{Q},t).$$

Obliczmy pochodne funkcji $L'(Q,\dot{Q},t)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L'}{\partial Q_j} &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial Q_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j}\right),\\
\frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_j} &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_j} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial q_i}{\partial Q_j},\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_j} &= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\frac{\partial q_i}{\partial Q_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j}\right],
\end{aligned}$$

Transformacje punktowe

Wyraźmy funkcję Lagrange'a w nowych współrzędnych

$$L(q, \dot{q}, t) = L\left(q(Q, t), \dot{q}(Q, \dot{Q}, t), t\right) \equiv L'(Q, \dot{Q}, t).$$

Obliczmy pochodne funkcji $L'(Q, \dot{Q}, t)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L'}{\partial Q_j} &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j} \right), \\
\frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_j} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j}, \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_j} &= \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j} \right],
\end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy udowodnione wcześniej własności

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_l} = \frac{\partial q_i}{\partial Q_l} \qquad \text{i} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial q_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j} \; .$$

Uwaga. Aby skorzystać z drugiej własności, trzeba założyć, że rozpatrywane transformacje są funkcjami klasy $\mathcal{C}^2$.

gdzie wykorzystaliśmy udowodnione wcześniej własności

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_l} = \frac{\partial q_i}{\partial Q_l} \qquad \text{i} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial q_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j}\,.$$

Uwaga. Aby skorzystać z drugiej własności, trzeba założyć, że rozpatrywane transformacje są funkcjami klasy $\mathcal{C}^2$.

Obliczmy następującą różnicę, korzystając z wyprowadzonych wzorów na pochodne funkcji $L'(Q, \dot{Q}, t)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_j} - \frac{\partial L'}{\partial Q_j} =$$

gdzie wykorzystaliśmy udowodnione wcześniej własności

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_l} = \frac{\partial q_i}{\partial Q_l} \qquad \text{i} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial q_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j}\,.$$

Uwaga. Aby skorzystać z drugiej własności, trzeba założyć, że rozpatrywane transformacje są funkcjami klasy $\mathcal{C}^2$.
Obliczmy następującą różnicę, korzystając z wyprowadzonych wzorów na pochodne funkcji $L'(Q, \dot{Q}, t)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_j} - \frac{\partial L'}{\partial Q_j} = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\,\frac{\partial q_i}{\partial Q_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\,\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j}\right.$$

gdzie wykorzystaliśmy udowodnione wcześniej własności

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_l} = \frac{\partial q_i}{\partial Q_l} \qquad \text{i} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial q_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j}\,.$$

Uwaga. Aby skorzystać z drugiej własności, trzeba założyć, że rozpatrywane transformacje są funkcjami klasy $\mathcal{C}^2$.
Obliczmy następującą różnicę, korzystając z wyprowadzonych wzorów na pochodne funkcji $L'(Q, \dot{Q}, t)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_j} - \frac{\partial L'}{\partial Q_j} = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\,\frac{\partial q_i}{\partial Q_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\,\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j}\right.$$
$$\left. - \frac{\partial L}{\partial q_i}\,\frac{\partial q_i}{\partial Q_j} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\,\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j}\right] =$$

gdzie wykorzystaliśmy udowodnione wcześniej własności

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_l} = \frac{\partial q_i}{\partial Q_l} \qquad \text{i} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial q_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j} .$$

Uwaga. Aby skorzystać z drugiej własności, trzeba założyć, że rozpatrywane transformacje są funkcjami klasy $\mathcal{C}^2$.
Obliczmy następującą różnicę, korzystając z wyprowadzonych wzorów na pochodne funkcji $L'(Q, \dot{Q}, t)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_j} - \frac{\partial L'}{\partial Q_j} = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\frac{\partial q_i}{\partial Q_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j} - \frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial Q_j} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j}\right] = \sum_{i=1}^{n}\underbrace{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}\right]}_{0}\frac{\partial q_i}{\partial Q_j} =$$

Transformacje punktowe

gdzie wykorzystaliśmy udowodnione wcześniej własności

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_l} = \frac{\partial q_i}{\partial Q_l} \qquad \text{i} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial q_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j}\,.$$

Uwaga. Aby skorzystać z drugiej własności, trzeba założyć, że rozpatrywane transformacje są funkcjami klasy $\mathcal{C}^2$.
Obliczmy następującą różnicę, korzystając z wyprowadzonych wzorów na pochodne funkcji $L'(Q, \dot{Q}, t)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_j} - \frac{\partial L'}{\partial Q_j} = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\,\frac{\partial q_i}{\partial Q_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\,\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j}\right.$$
$$\left. - \frac{\partial L}{\partial q_i}\,\frac{\partial q_i}{\partial Q_j} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\,\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j}\right] = \sum_{i=1}^{n}\underbrace{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}\right]}_{0}\,\frac{\partial q_i}{\partial Q_j} = 0.$$

gdzie wykorzystaliśmy udowodnione wcześniej własności

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_l} = \frac{\partial q_i}{\partial Q_l} \qquad \text{i} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial q_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j}\,.$$

Uwaga. Aby skorzystać z drugiej własności, trzeba założyć, że rozpatrywane transformacje są funkcjami klasy $\mathcal{C}^2$.
Obliczmy następującą różnicę, korzystając z wyprowadzonych wzorów na pochodne funkcji $L'(Q, \dot{Q}, t)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_j} - \frac{\partial L'}{\partial Q_j} = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\,\frac{\partial q_i}{\partial Q_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\,\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j}\right.$$
$$\left. - \frac{\partial L}{\partial q_i}\,\frac{\partial q_i}{\partial Q_j} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\,\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j}\right] = \sum_{i=1}^{n}\underbrace{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}\right]}_{0}\,\frac{\partial q_i}{\partial Q_j} = 0.$$

Widzimy, że równania Lagrange'a II rodzaju po transformacji punktowej mają dokładnie taką samą postać jak przed transformacją:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_j} - \frac{\partial L'}{\partial Q_j} = 0, \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

Uwaga. Ponieważ funkcja Lagrange'a $L'(Q, \dot{Q}, t)$ ma na ogół inną postać niż wyjściowa funkcja $L(q, \dot{q}, t)$, to równania ruchu wyrażone przez współrzędne Q_j i prędkości $\dot{Q}_j$ będą miały inną postać, niż równania wyjściowe, wyrażone przez q_j i $\dot{q}_j$, ale zawsze będziemy mogli je wyprowadzić wychodząc z równań Lagrange'a II rodzaju w niezmienionej formie.

Transformacje punktowe

Widzimy, że równania Lagrange'a II rodzaju po transformacji punktowej mają dokładnie taką samą postać jak przed transformacją:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_j} - \frac{\partial L'}{\partial Q_j} = 0, \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

Uwaga. Ponieważ funkcja Lagrange'a $L'(Q, \dot{Q}, t)$ ma na ogół inną postać niż wyjściowa funkcja $L(q, \dot{q}, t)$, to równania ruchu wyrażone przez współrzędne Q_j i prędkości $\dot{Q}_j$ będą miały inną postać, niż równania wyjściowe, wyrażone przez q_j i $\dot{q}_j$, ale zawsze będziemy mogli je wyprowadzić wychodząc z równań Lagrange'a II rodzaju w niezmienionej formie.

Niezmienniczość cechowania

Inną ciekawą własnością równań Lagrange'a II rodzaju jest tzw. niezmienniczość cechowania.

Przetransformujmy funkcję Lagrange'a, tym razem bez zmiany współrzędnych, w następujący sposób

$$L(q,\dot{q},t) \rightarrow L'(q,\dot{q},t) = L(q,\dot{q},t) + \frac{\mathrm{d}F(q,t)}{\mathrm{d}t},$$

gdzie $F(q,t)$ jest dowolną różniczkowalną funkcją współrzędnych uogólnionych i czasu.

Inną ciekawą własnością równań Lagrange'a II rodzaju jest tzw. niezmienniczość cechowania.

Przetransformujmy funkcję Lagrange'a, tym razem bez zmiany współrzędnych, w następujący sposób

$$L(q,\dot{q},t) \to L'(q,\dot{q},t) = L(q,\dot{q},t) + \frac{\mathrm{d}F(q,t)}{\mathrm{d}t},$$

gdzie $F(q,t)$ jest dowolną różniczkowalną funkcją współrzędnych uogólnionych i czasu.

Wstawmy funkcję $L'(q,\dot{q},t)$ do równań Lagrange'a II rodzaju

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L'}{\partial q_j} =$$

Inną ciekawą własnością równań Lagrange'a II rodzaju jest tzw. niezmienniczość cechowania.
Przetransformujmy funkcję Lagrange'a, tym razem bez zmiany współrzędnych, w następujący sposób

$$L(q, \dot{q}, t) \to L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{\mathrm{d}F(q,t)}{\mathrm{d}t},$$

gdzie $F(q,t)$ jest dowolną różniczkowalną funkcją współrzędnych uogólnionych i czasu.
Wstawmy funkcję $L'(q, \dot{q}, t)$ do równań Lagrange'a II rodzaju

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L'}{\partial q_j} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j}}_{0} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\frac{\mathrm{d}F(q,t)}{\mathrm{d}t} - \frac{\partial}{\partial q_j}\frac{\mathrm{d}F(q,t)}{\mathrm{d}t}.$$

Inną ciekawą własnością równań Lagrange'a II rodzaju jest tzw. niezmienniczość cechowania.
Przetransformujmy funkcję Lagrange'a, tym razem bez zmiany współrzędnych, w następujący sposób

$$L(q,\dot{q},t) \to L'(q,\dot{q},t) = L(q,\dot{q},t) + \frac{\mathrm{d}F(q,t)}{\mathrm{d}t},$$

gdzie $F(q,t)$ jest dowolną różniczkowalną funkcją współrzędnych uogólnionych i czasu.
Wstawmy funkcję $L'(q,\dot{q},t)$ do równań Lagrange'a II rodzaju

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L'}{\partial q_j} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j}}_{0} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\frac{\mathrm{d}F(q,t)}{\mathrm{d}t} - \frac{\partial}{\partial q_j}\frac{\mathrm{d}F(q,t)}{\mathrm{d}t}\,.$$

Obliczmy pochodne funkcji $F \equiv F(q, t)$ zaznaczone na niebiesko

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} =$$

Obliczmy pochodne funkcji $F \equiv F(q, t)$ zaznaczone na niebiesko

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial t},$$

Niezmienniczość cechowania

Obliczmy pochodne funkcji $F \equiv F(q,t)$ zaznaczone na niebiesko

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial t},$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$$

Niezmienniczość cechowania

Obliczmy pochodne funkcji $F \equiv F(q, t)$ zaznaczone na niebiesko

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial t},$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} =$$

Niezmienniczość cechowania

Obliczmy pochodne funkcji $F \equiv F(q, t)$ zaznaczone na niebiesko

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial t},$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_j} =$$

Obliczmy pochodne funkcji $F \equiv F(q,t)$ zaznaczone na niebiesko

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial t}, \\
\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_i}\delta_{ij} =
\end{aligned}
$$

Obliczmy pochodne funkcji $F \equiv F(q,t)$ zaznaczone na niebiesko

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial t},$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_i}\delta_{ij} = \frac{\partial F}{\partial q_j}$$

Niezmienniczość cechowania

Obliczmy pochodne funkcji $F \equiv F(q,t)$ zaznaczone na niebiesko

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial t},$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_i}\delta_{ij} = \frac{\partial F}{\partial q_j}$$

i wstawmy je do równań Lagrange'a II rodzaju

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L'}{\partial q_j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial q_j} - \frac{\partial}{\partial q_j}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}.$$

Niezmienniczość cechowania

Obliczmy pochodne funkcji $F \equiv F(q,t)$ zaznaczone na niebiesko

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial t},$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_i}\delta_{ij} = \frac{\partial F}{\partial q_j}$$

i wstawmy je do równań Lagrange'a II rodzaju

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L'}{\partial q_j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial q_j} - \frac{\partial}{\partial q_j}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\,.$$

Widzimy, że wyrazy po prawej stronie różnią się tylko kolejnością pochodnych.

Niezmienniczość cechowania

Obliczmy pochodne funkcji $F \equiv F(q,t)$ zaznaczone na niebiesko

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial t}, \\ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_i}\delta_{ij} = \frac{\partial F}{\partial q_j} \end{aligned}$$

i wstawmy je do równań Lagrange'a II rodzaju

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L'}{\partial q_j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial q_j} - \frac{\partial}{\partial q_j}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} .$$

Widzimy, że wyrazy po prawej stronie różnią się tylko kolejnością pochodnych. Jeśli funkcja F jest klasy $\mathcal{C}^2$, to oba wyrazy kasują się

Niezmienniczość cechowania

Obliczmy pochodne funkcji $F \equiv F(q,t)$ zaznaczone na niebiesko

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial t}, \\
\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_i}\delta_{ij} = \frac{\partial F}{\partial q_j}
\end{aligned}
$$

i wstawmy je do równań Lagrange'a II rodzaju

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L'}{\partial q_j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial q_j} - \frac{\partial}{\partial q_j}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}.
$$

Widzimy, że wyrazy po prawej stronie różnią się tylko kolejnością pochodnych. Jeśli funkcja F jest klasy $\mathcal{C}^2$, to oba wyrazy kasują się i otrzymujemy równania Lagrange'a II rodzaju

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L'}{\partial q_j} = 0, \qquad j = 1, 2, ..., n,$$

takie same jak równania wyjściowe z funkcją L.

i otrzymujemy równania Lagrange'a II rodzaju

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L'}{\partial q_j} = 0, \qquad j = 1, 2, ..., n,$$

takie same jak równania wyjściowe z funkcją L.

Podsumujmy naszą dotychczasową wiedzę na temat równań Lagrange'a II rodzaju.

- Dzięki swojej prostocie i niezmienniczości przy transformacjach punktowych nadają się na ogół najlepiej do znajdywania równań ruchu dla układów z więzami holonomicznymi.

Równania Lagrange'a II rodzaju

Podsumujmy naszą dotychczasową wiedzę na temat równań Lagrange'a II rodzaju.

- Dzięki swojej prostocie i niezmienniczości przy transformacjach punktowych nadają się na ogół najlepiej do znajdywania równań ruchu dla układów z więzami holonomicznymi.
- Stanowią centralny punkt mechaniki lagranżowskiej oraz są punktem wyjścia do dalszych studiów mechaniki.

Równania Lagrange'a II rodzaju

Podsumujmy naszą dotychczasową wiedzę na temat równań Lagrange'a II rodzaju.

- Dzięki swojej prostocie i niezmienniczości przy transformacjach punktowych nadają się na ogół najlepiej do znajdywania równań ruchu dla układów z więzami holonomicznymi.
- Stanowią centralny punkt mechaniki lagranżowskiej oraz są punktem wyjścia do dalszych studiów mechaniki.