Równania Newtona dla układów z więzami

Wykład 3

Karol Kołodziej

(przy współpracy Bartosza Dziewita)

Instytut Fizyki
Uniwersytet Śląski, Katowice
http://kk.us.edu.pl

Równania ruchu dla układów z więzami

Rozważmy teraz układ N punktów materialnych, na który nałożono więzy holonomiczne opisane równaniami

$$f_i\left(q_1, q_2, ..., q_{3N}, t\right) = 0, \quad i = 1, 2, ..., k,$$

z których możemy wyeliminować k współrzędnych uogólnionych q_j.

Równania ruchu dla układów z więzami

Rozważmy teraz układ N punktów materialnych, na który nałożono więzy holonomiczne opisane równaniami

$$f_i\left(q_1, q_2, ..., q_{3N}, t\right) = 0, \quad i = 1, 2, ..., k,$$

z których możemy wyeliminować k współrzędnych uogólnionych q_j. Nie zmniejszając ogólności rozważań możemy przyjąć, że wyeliminowaliśmy k ostatnich współrzędnych

$$q_{3N-k+1}, q_{3N-k+2}, \cdots, q_{3N}$$

Równania ruchu dla układów z więzami

Rozważmy teraz układ N punktów materialnych, na który nałożono więzy holonomiczne opisane równaniami

$$f_i\left(q_1, q_2, ..., q_{3N}, t\right) = 0, \quad i = 1, 2, ..., k,$$

z których możemy wyeliminować k współrzędnych uogólnionych q_j. Nie zmniejszając ogólności rozważań możemy przyjąć, że wyeliminowaliśmy k ostatnich współrzędnych

$$q_{3N-k+1}, q_{3N-k+2}, \cdots, q_{3N}$$

tak, że wektory położenia poszczególnych punktów układu będą powiązane z pozostałymi $3N-k$ niezależnymi współrzędnymi uogólnionymi równaniami

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i\left(q_1, q_2, ..., q_{3N-k}, t\right), \quad i = 1, 2, ..., N.$$

Równania ruchu dla układów z więzami

Rozważmy teraz układ N punktów materialnych, na który nałożono więzy holonomiczne opisane równaniami

$$f_i\left(q_1, q_2, ..., q_{3N}, t\right) = 0, \quad i = 1, 2, ..., k,$$

z których możemy wyeliminować k współrzędnych uogólnionych q_j. Nie zmniejszając ogólności rozważań możemy przyjąć, że wyeliminowaliśmy k ostatnich współrzędnych

$$q_{3N-k+1}, q_{3N-k+2}, \cdots, q_{3N}$$

tak, że wektory położenia poszczególnych punktów układu będą powiązane z pozostałymi $3N-k$ niezależnymi współrzędnymi uogólnionymi równaniami

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i\left(q_1, q_2, ..., q_{3N-k}, t\right), \quad i = 1, 2, ..., N.$$

W obecności więzów równanie ruchu i-tego punktu wynikające z II zasady dynamiki Newtona ma postać

$$m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{Z}_i, \qquad i = 1, 2, ..., N,$$

gdzie po prawej prawej stronie

W obecności więzów równanie ruchu i-tego punktu wynikające z II zasady dynamiki Newtona ma postać

$$m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{Z}_i, \qquad i = 1, 2, ..., N,$$

gdzie po prawej prawej stronie – oprócz wypadkowej, *aktywnej* siły działającej na i-ty punkt –

W obecności więzów równanie ruchu i-tego punktu wynikające z II zasady dynamiki Newtona ma postać

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{Z}_i, \qquad i = 1, 2, ..., N,$$

gdzie po prawej prawej stronie – oprócz wypadkowej, *aktywnej* siły działającej na i-ty punkt – wprowadziliśmy siłę reakcji więzów $\vec{Z}_i$,

Równania ruchu dla układów z więzami

W obecności więzów równanie ruchu i-tego punktu wynikające z II zasady dynamiki Newtona ma postać

$$m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{Z}_i, \qquad i = 1, 2, ..., N,$$

gdzie po prawej prawej stronie – oprócz wypadkowej, *aktywnej* siły działającej na i-ty punkt – wprowadziliśmy siłę reakcji więzów $\vec{Z}_i$, która sprawia, że punkt materialny porusza się w sposób zgodny z więzami.

Równania ruchu dla układów z więzami

W obecności więzów równanie ruchu i-tego punktu wynikające z II zasady dynamiki Newtona ma postać

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{Z}_i, \qquad i = 1, 2, ..., N,$$

gdzie po prawej prawej stronie – oprócz wypadkowej, *aktywnej* siły działającej na i-ty punkt – wprowadziliśmy siłę reakcji więzów $\vec{Z}_i$, która sprawia, że punkt materialny porusza się w sposób zgodny z więzami.

Znamy skutki działania sił reakcji więzów,

W obecności więzów równanie ruchu i-tego punktu wynikające z II zasady dynamiki Newtona ma postać

$$m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{Z}_i, \qquad i = 1, 2, ..., N,$$

gdzie po prawej prawej stronie – oprócz wypadkowej, *aktywnej* siły działającej na i-ty punkt – wprowadziliśmy siłę reakcji więzów $\vec{Z}_i$, która sprawia, że punkt materialny porusza się w sposób zgodny z więzami.

Znamy skutki działania sił reakcji więzów, ale na ogół nie znamy ich wielkości,

Równania ruchu dla układów z więzami

W obecności więzów równanie ruchu *i*-tego punktu wynikające z II zasady dynamiki Newtona ma postać

$$m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{Z}_i, \qquad i = 1, 2, ..., N,$$

gdzie po prawej prawej stronie – oprócz wypadkowej, *aktywnej* siły działającej na *i*-ty punkt – wprowadziliśmy siłę reakcji więzów $\vec{Z}_i$, która sprawia, że punkt materialny porusza się w sposób zgodny z więzami.

Znamy skutki działania sił reakcji więzów, ale na ogół nie znamy ich wielkości, dlatego ich występowanie komplikuje rozwiązanie zagadnienia ruchu.

Równania ruchu dla układów z więzami

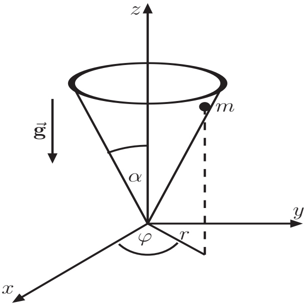
W obecności więzów równanie ruchu *i*-tego punktu wynikające z II zasady dynamiki Newtona ma postać

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{Z}_i, \qquad i = 1, 2, ..., N,$$

gdzie po prawej prawej stronie – oprócz wypadkowej, *aktywnej* siły działającej na *i*-ty punkt – wprowadziliśmy siłę reakcji więzów $\vec{Z}_i$, która sprawia, że punkt materialny porusza się w sposób zgodny z więzami.

Znamy skutki działania sił reakcji więzów, ale na ogół nie znamy ich wielkości, dlatego ich występowanie komplikuje rozwiązanie zagadnienia ruchu.

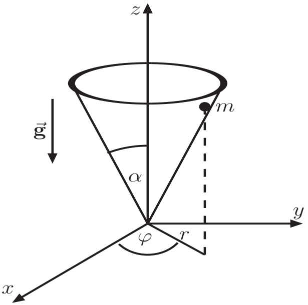
Przykład 3. Punkt materialny o masie m porusza się po wewnętrznej powierzchni stożka o kącie półrozwartości α.



Równanie ruchu ma postać

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \vec{Z},$$

Przykład 3. Punkt materialny o masie m porusza się po wewnętrznej powierzchni stożka o kącie półrozwartości α.



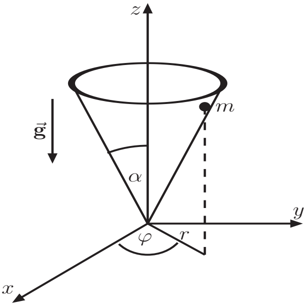
Równanie ruchu ma postać

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \vec{Z},$$

a w składowych

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= Z_x, \\ m\ddot{y} &= Z_y, \\ m\ddot{z} &= -mg + Z_z. \end{aligned}$$

Przykład 3. Punkt materialny o masie m porusza się po wewnętrznej powierzchni stożka o kącie półrozwartości α.



Równanie ruchu ma postać

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \vec{Z},$$

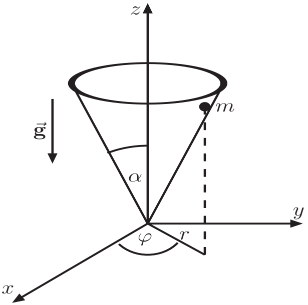
a w składowych

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= Z_x, \\ m\ddot{y} &= Z_y, \\ m\ddot{z} &= -mg + Z_z. \end{aligned}$$

Równanie więzów:

$$\frac{z}{r} = \operatorname{ctg}\alpha \quad \Rightarrow \quad r - z\operatorname{tg}\alpha = 0.$$

Przykład 3. Punkt materialny o masie m porusza się po wewnętrznej powierzchni stożka o kącie półrozwartości α.



Równanie ruchu ma postać

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \vec{Z},$$

a w składowych

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= Z_x, \\ m\ddot{y} &= Z_y, \\ m\ddot{z} &= -mg + Z_z. \end{aligned}$$

Równanie więzów:

$$\frac{z}{r} = \operatorname{ctg}\alpha \quad \Rightarrow \quad r - z\operatorname{tg}\alpha = 0.$$

Jako zmienne niezależne wybieramy współrzędne cylindryczne r i φ. Obliczmy pochodne czasowe odpowiednich związków ze współrzędnymi kartezjańskimi

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & r\cos\varphi, \\ y & = & r\sin\varphi, \\ z & = & r\,\mathrm{ctg}\,\alpha, \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \dot{x} \\ \\ \\ \end{array}\right.$$

Jako zmienne niezależne wybieramy współrzędne cylindryczne r i φ. Obliczmy pochodne czasowe odpowiednich związków ze współrzędnymi kartezjańskimi

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & r\cos\varphi, \\ y & = & r\sin\varphi, \\ z & = & r\,\mathrm{ctg}\,\alpha, \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcl} \dot{x} & = & \\ & & \\ & & \end{array}\right.$$

Jako zmienne niezależne wybieramy współrzędne cylindryczne r i φ. Obliczmy pochodne czasowe odpowiednich związków ze współrzędnymi kartezjańskimi

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & r\cos\varphi, \\ y & = & r\sin\varphi, \\ z & = & r\,\mathrm{ctg}\,\alpha, \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcl} \dot{x} & = & \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi, \\ \dot{y} & & \\ & & \end{array}\right.$$

Jako zmienne niezależne wybieramy współrzędne cylindryczne r i φ. Obliczmy pochodne czasowe odpowiednich związków ze współrzędnymi kartezjańskimi

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& r\cos\varphi, \\ y &=& r\sin\varphi, \\ z &=& r\,\mathrm{ctg}\,\alpha, \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcl} \dot{x} &=& \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi, \\ \dot{y} &=& \\ & & \end{array}\right.$$

Równania ruchu dla układów z więzami

Jako zmienne niezależne wybieramy współrzędne cylindryczne r i φ. Obliczmy pochodne czasowe odpowiednich związków ze współrzędnymi kartezjańskimi

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & r\cos\varphi, \\ y & = & r\sin\varphi, \\ z & = & r\,\mathrm{ctg}\,\alpha, \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcl} \dot{x} & = & \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi, \\ \dot{y} & = & \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi, \\ \dot{z} & & \end{array}\right.$$

Równania ruchu dla układów z więzami

Jako zmienne niezależne wybieramy współrzędne cylindryczne r i φ. Obliczmy pochodne czasowe odpowiednich związków ze współrzędnymi kartezjańskimi

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & r\cos\varphi, \\ y & = & r\sin\varphi, \\ z & = & r\operatorname{ctg}\alpha, \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcl} \dot{x} & = & \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi, \\ \dot{y} & = & \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi, \\ \dot{z} & = & \end{array}\right.$$

Jako zmienne niezależne wybieramy współrzędne cylindryczne r i φ. Obliczmy pochodne czasowe odpowiednich związków ze współrzędnymi kartezjańskimi

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & r\cos\varphi, \\ y & = & r\sin\varphi, \\ z & = & r\,\mathrm{ctg}\,\alpha, \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcl} \dot{x} & = & \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi, \\ \dot{y} & = & \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi, \\ \dot{z} & = & \dot{r}\,\mathrm{ctg}\,\alpha, \end{array}\right.$$

Zadanie 2. Uzasadnić powyższe wzory na pochodne czasowe w oparciu o wzór na pochodną funkcji złożonej wielu zmiennych, biorąc pod uwagę, że $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ a kąt α jest stały.

Jako zmienne niezależne wybieramy współrzędne cylindryczne r i φ. Obliczmy pochodne czasowe odpowiednich związków ze współrzędnymi kartezjańskimi

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & r\cos\varphi, \\ y & = & r\sin\varphi, \\ z & = & r\,\mathrm{ctg}\,\alpha, \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcl} \dot{x} & = & \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi, \\ \dot{y} & = & \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi, \\ \dot{z} & = & \dot{r}\,\mathrm{ctg}\,\alpha, \end{array}\right.$$

Zadanie 2. Uzasadnić powyższe wzory na pochodne czasowe w oparciu o wzór na pochodną funkcji złożonej wielu zmiennych, biorąc pod uwagę, że $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ a kąt α jest stały.

Obliczmy drugą pochodną czasową $\ddot{x}$

$$\ddot{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi\right)$$

Równania ruchu dla układów z więzami

Obliczmy drugą pochodną czasową $\ddot{x}$

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi\right) \\ &= \end{aligned}$$

Obliczmy drugą pochodną czasową $\ddot{x}$

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi\right) \\
&= \ddot{r}\cos\varphi - \dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi - \dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi - r\ddot{\varphi}\sin\varphi - r\dot{\varphi}^2\cos\varphi
\end{aligned}$$

Obliczmy drugą pochodną czasową $\ddot{x}$

$$
\begin{aligned}
\ddot{x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi\right) \\
&= \ddot{r}\cos\varphi - \dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi - \dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi - r\ddot{\varphi}\sin\varphi - r\dot{\varphi}^2\cos\varphi \\
&= \ddot{r}\cos\varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi - r\ddot{\varphi}\sin\varphi - r\dot{\varphi}^2\cos\varphi.
\end{aligned}
$$

Obliczmy drugą pochodną czasową $\ddot{x}$

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi\right) \\
&= \ddot{r}\cos\varphi - \dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi - \dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi - r\ddot{\varphi}\sin\varphi - r\dot{\varphi}^2\cos\varphi \\
&= \ddot{r}\cos\varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi - r\ddot{\varphi}\sin\varphi - r\dot{\varphi}^2\cos\varphi.
\end{aligned}$$

Zadanie 3. Pokazać, że drugie pochodne czasowe $\ddot{y}$ i $\ddot{z}$ są równe

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \ddot{r}\sin\varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi}\cos\varphi + r\ddot{\varphi}\cos\varphi - r\dot{\varphi}^2\sin\varphi, \\ \ddot{z} &= \ddot{r}\,\mathrm{ctg}\,\alpha, \end{aligned}$$

a równania ruchu mają postać

$$\begin{aligned} & m\left(\ddot{r}\cos\varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi - r\ddot{\varphi}\sin\varphi - r\dot{\varphi}^2\cos\varphi\right) = Z_x, \\ & m\left(\ddot{r}\sin\varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi}\cos\varphi + r\ddot{\varphi}\cos\varphi - r\dot{\varphi}^2\sin\varphi\right) = Z_y, \\ & m\left(\ddot{r}\,\mathrm{ctg}\,\alpha + g\right) = Z_z. \end{aligned}$$

Równania ruchu dla układów z więzami

Zadanie 3. Pokazać, że drugie pochodne czasowe $\ddot{y}$ i $\ddot{z}$ są równe

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= \ddot{r}\sin\varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi}\cos\varphi + r\ddot{\varphi}\cos\varphi - r\dot{\varphi}^2\sin\varphi,\\ \ddot{z} &= \ddot{r}\,\mathrm{ctg}\,\alpha,\end{aligned}$$

a równania ruchu mają postać

$$\begin{aligned}&m\left(\ddot{r}\cos\varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi - r\ddot{\varphi}\sin\varphi - r\dot{\varphi}^2\cos\varphi\right) = Z_x,\\ &m\left(\ddot{r}\sin\varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi}\cos\varphi + r\ddot{\varphi}\cos\varphi - r\dot{\varphi}^2\sin\varphi\right) = Z_y,\\ &m\left(\ddot{r}\,\mathrm{ctg}\,\alpha + g\right) = Z_z.\end{aligned}$$

Zauważmy, że jest to układ trzech równań różniczkowych z pięcioma niewiadomymi: $r(t)$, $\varphi(t)$, Z_x, Z_y i Z_z.

Zadanie 3. Pokazać, że drugie pochodne czasowe $\ddot{y}$ i $\ddot{z}$ są równe

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= \ddot{r}\sin\varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi}\cos\varphi + r\ddot{\varphi}\cos\varphi - r\dot{\varphi}^2\sin\varphi,\\ \ddot{z} &= \ddot{r}\,\mathrm{ctg}\,\alpha,\end{aligned}$$

a równania ruchu mają postać

$$\begin{aligned}&m\left(\ddot{r}\cos\varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi - r\ddot{\varphi}\sin\varphi - r\dot{\varphi}^2\cos\varphi\right) = Z_x,\\ &m\left(\ddot{r}\sin\varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi}\cos\varphi + r\ddot{\varphi}\cos\varphi - r\dot{\varphi}^2\sin\varphi\right) = Z_y,\\ &m\left(\ddot{r}\,\mathrm{ctg}\,\alpha + g\right) = Z_z.\end{aligned}$$

Zauważmy, że jest to układ trzech równań różniczkowych z pięcioma niewiadomymi: $r(t)$, $\varphi(t)$, Z_x, Z_y i Z_z.

Aby jednoznacznie rozwiązać problem, musimy uczynić pewne założenia co do natury siły reakcji więzów $\vec{Z}$.

Założymy, że jest ona prostopadła do powierzchni stożka.

Równania ruchu dla układów z więzami

Aby jednoznacznie rozwiązać problem, musimy uczynić pewne założenia co do natury siły reakcji więzów $\vec{Z}$.

Założymy, że jest ona prostopadła do powierzchni stożka.

Jest to założenie naturalne. Gdyby nie było ono spełnione, to siła reakcji więzów mogłaby wkonywać pracę nad punktem, co w oczywisty sposób przeczyłoby obserwacjom.

Aby jednoznacznie rozwiązać problem, musimy uczynić pewne założenia co do natury siły reakcji więzów $\vec{Z}$.

Założymy, że jest ona prostopadła do powierzchni stożka.

Jest to założenie naturalne. Gdyby nie było ono spełnione, to siła reakcji więzów mogłaby wkonywać pracę nad punktem, co w oczywisty sposób przeczyłoby obserwacjom.

Nieruchoma powierzchnia więzów nie może wykonywać pracy nad układem.

Aby jednoznacznie rozwiązać problem, musimy uczynić pewne założenia co do natury siły reakcji więzów $\vec{Z}$.
Założymy, że jest ona prostopadła do powierzchni stożka.
Jest to założenie naturalne. Gdyby nie było ono spełnione, to siła reakcji więzów mogłaby wkonywać pracę nad punktem, co w oczywisty sposób przeczyłoby obserwacjom.
Nieruchoma powierzchnia więzów nie może wykonywać pracy nad układem.

Równania ruchu dla układów z więzami

Z kursów analizy matematycznej i fizyki ogólnej wiemy, że wektorem prostopadłym do powierzni danej równaniem

$$f(x, y, z) = r - z \operatorname{tg} \alpha = 0$$

jest wektor gradientu $\vec{\nabla} f$, który we współrzędnych kartezjańskich ma postać

$$\vec{\nabla} f \equiv \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right].$$

Obliczmy potrzebne pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{x^2 + y^2} - z \operatorname{tg} \alpha \right) =$$

Z kursów analizy matematycznej i fizyki ogólnej wiemy, że wektorem prostopadłym do powierzni danej równaniem

$$f(x, y, z) = r - z \operatorname{tg} \alpha = 0$$

jest wektor gradientu $\vec{\nabla} f$, który we współrzędnych kartezjańskich ma postać

$$\vec{\nabla} f \equiv \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right].$$

Obliczmy potrzebne pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{x^2 + y^2} - z \operatorname{tg} \alpha \right) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} =$$

Równania ruchu dla układów z więzami

Z kursów analizy matematycznej i fizyki ogólnej wiemy, że wektorem prostopadłym do powierzni danej równaniem

$$f(x, y, z) = r - z \operatorname{tg} \alpha = 0$$

jest wektor gradientu $\vec{\nabla} f$, który we współrzędnych kartezjańskich ma postać

$$\vec{\nabla} f \equiv \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right].$$

Obliczmy potrzebne pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{x^2 + y^2} - z \operatorname{tg} \alpha \right) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} =$$

Z kursów analizy matematycznej i fizyki ogólnej wiemy, że wektorem prostopadłym do powierzni danej równaniem

$$f(x, y, z) = r - z \,\mathrm{tg}\, \alpha = 0$$

jest wektor gradientu $\vec{\nabla} f$, który we współrzędnych kartezjańskich ma postać

$$\vec{\nabla} f \equiv \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right].$$

Obliczmy potrzebne pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2 + y^2} - z \,\mathrm{tg}\, \alpha\right) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} = \cos\varphi,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} =$$

Z kursów analizy matematycznej i fizyki ogólnej wiemy, że wektorem prostopadłym do powierzni danej równaniem

$$f(x, y, z) = r - z \operatorname{tg} \alpha = 0$$

jest wektor gradientu $\vec{\nabla} f$, który we współrzędnych kartezjańskich ma postać

$$\vec{\nabla} f \equiv \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right].$$

Obliczmy potrzebne pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2+y^2} - z \operatorname{tg} \alpha\right) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r} = \cos\varphi,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin\varphi, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} =$$

Równania ruchu dla układów z więzami

Z kursów analizy matematycznej i fizyki ogólnej wiemy, że wektorem prostopadłym do powierzni danej równaniem

$$f(x, y, z) = r - z \operatorname{tg} \alpha = 0$$

jest wektor gradientu $\vec{\nabla} f$, który we współrzędnych kartezjańskich ma postać

$$\vec{\nabla} f \equiv \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right].$$

Obliczmy potrzebne pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{x^2 + y^2} - z \operatorname{tg} \alpha \right) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} = \cos \varphi,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin \varphi, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = - \operatorname{tg} \alpha.$$

Równania ruchu dla układów z więzami

Z kursów analizy matematycznej i fizyki ogólnej wiemy, że wektorem prostopadłym do powierzni danej równaniem

$$f(x, y, z) = r - z \operatorname{tg} \alpha = 0$$

jest wektor gradientu $\vec{\nabla} f$, który we współrzędnych kartezjańskich ma postać

$$\vec{\nabla} f \equiv \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right].$$

Obliczmy potrzebne pochodne cząstkowe

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2+y^2} - z \operatorname{tg} \alpha\right) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r} = \cos\varphi, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{y}{r} = \sin\varphi, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = -\operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy wzór

$$\vec{\nabla} f = [\cos\varphi, \sin\varphi, -\operatorname{tg}\alpha] \,.$$

Wektor $\vec{Z}$ jest równoległy do wektora $\vec{\nabla} f$, a więc

$$\vec{Z} = \lambda \vec{\nabla} f, \quad \text{gdzie} \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

Równania ruchu dla układów z więzami

Otrzymaliśmy wzór

$$\vec{\nabla} f = [\cos\varphi, \sin\varphi, -\operatorname{tg}\alpha] \,.$$

Wektor $\vec{Z}$ jest równoległy do wektora $\vec{\nabla} f$, a więc

$$\vec{Z} = \lambda \vec{\nabla} f, \quad \text{gdzie} \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

co jest równoważne trzem równaniom skalarnym

$$Z_x = \lambda \cos\varphi, \qquad Z_y = \lambda \sin\varphi, \qquad Z_z = -\lambda \operatorname{tg}\alpha.$$

Otrzymaliśmy wzór

$$\vec{\nabla} f = [\cos\varphi, \sin\varphi, -\operatorname{tg}\alpha]\,.$$

Wektor $\vec{Z}$ jest równoległy do wektora $\vec{\nabla} f$, a więc

$$\vec{Z} = \lambda \vec{\nabla} f, \quad \text{gdzie} \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

co jest równoważne trzem równaniom skalarnym

$$Z_x = \lambda\cos\varphi, \qquad Z_y = \lambda\sin\varphi, \qquad Z_z = -\lambda\operatorname{tg}\alpha.$$

Eliminując współczynnik λ otrzymujemy dwa brakujące równania

$$Z_x\sin\varphi = Z_y\cos\varphi, \qquad Z_z\cos\varphi = -Z_x\operatorname{tg}\alpha.$$

Otrzymaliśmy wzór

$$\vec{\nabla} f = [\cos\varphi, \sin\varphi, -\operatorname{tg}\alpha] \, .$$

Wektor $\vec{Z}$ jest równoległy do wektora $\vec{\nabla} f$, a więc

$$\vec{Z} = \lambda \vec{\nabla} f, \quad \text{gdzie} \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

co jest równoważne trzem równaniom skalarnym

$$Z_x = \lambda \cos\varphi, \qquad Z_y = \lambda \sin\varphi, \qquad Z_z = -\lambda \operatorname{tg}\alpha.$$

Eliminując współczynnik λ otrzymujemy dwa brakujące równania

$$Z_x \sin\varphi = Z_y \cos\varphi, \qquad Z_z \cos\varphi = -Z_x \operatorname{tg}\alpha.$$

Zadanie 4. Pokazać, że powyższe dwa równania pozwalają wyeliminować składowe siły reakcji więzów z równań ruchu

$$m\left(\ddot{r}\cos\varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi - r\ddot{\varphi}\sin\varphi - r\dot{\varphi}^2\cos\varphi\right) = Z_x,$$
$$m\left(\ddot{r}\sin\varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi}\cos\varphi + r\ddot{\varphi}\cos\varphi - r\dot{\varphi}^2\sin\varphi\right) = Z_y,$$
$$m\left(\ddot{r}\,\mathrm{ctg}\,\alpha + g\right) = Z_z,$$

które ostatecznie przybierają postać

$$\begin{aligned} 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} &= 0 \\ (\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\alpha)\,\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\,\mathrm{tg}\,\alpha + g &= 0. \end{aligned}$$

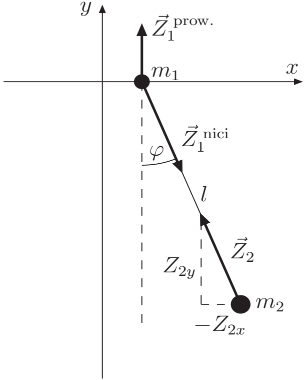
Zadanie 4. Pokazać, że powyższe dwa równania pozwalają wyeliminować składowe siły reakcji więzów z równań ruchu

$$m\left(\ddot{r}\cos\varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi - r\ddot{\varphi}\sin\varphi - r\dot{\varphi}^2\cos\varphi\right) = Z_x,$$
$$m\left(\ddot{r}\sin\varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi}\cos\varphi + r\ddot{\varphi}\cos\varphi - r\dot{\varphi}^2\sin\varphi\right) = Z_y,$$
$$m\left(\ddot{r}\,\mathrm{ctg}\,\alpha + g\right) = Z_z,$$

które ostatecznie przybierają postać

$$\begin{aligned} 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} &= 0 \\ \left(\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\alpha\right)\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\,\mathrm{tg}\,\alpha + g &= 0. \end{aligned}$$

Przykład 4. Wyprowadzić równania ruchu dla wahadła matematycznego z punktem zawieszenia swobodnie ślizgającym się po osi Ox. Przyjąć oznaczenia takie jak na rysunku.



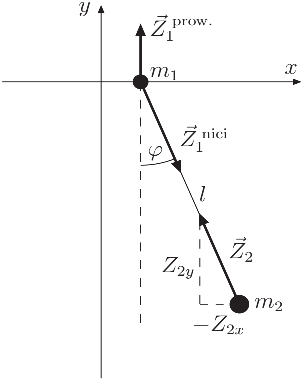
Równania ruchu mają postać

$$
\begin{aligned}
m_1\ddot{x}_1 &= Z_{1x}, \\
m_1\ddot{y}_1 &= -m_1 g + Z_{1y}, \\
m_2\ddot{x}_2 &= Z_{2x}, \\
m_2\ddot{y}_2 &= -m_2 g + Z_{2y}.
\end{aligned}
$$

Równania więzów:

$$y_1 = 0, \qquad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l^2 = 0.$$

Przykład 4. Wyprowadzić równania ruchu dla wahadła matematycznego z punktem zawieszenia swobodnie ślizgającym się po osi Ox. Przyjąć oznaczenia takie jak na rysunku.



Równania ruchu mają postać

$$
\begin{aligned}
m_1\ddot{x}_1 &= Z_{1x}, \\
m_1\ddot{y}_1 &= -m_1 g + Z_{1y}, \\
m_2\ddot{x}_2 &= Z_{2x}, \\
m_2\ddot{y}_2 &= -m_2 g + Z_{2y}.
\end{aligned}
$$

Równania więzów:

$$y_1 = 0, \qquad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l^2 = 0.$$

Jako niezależne współrzędne uogólnione wybieramy x_1 – opisujące położenie punktu zawieszenia (pamiętamy, że $y_1 = 0$)

Jako niezależne współrzędne uogólnione wybieramy x_1 – opisujące położenie punktu zawieszenia (pamiętamy, że $y_1 = 0$) i φ – kąt wychylenia wahadła.

Jako niezależne współrzędne uogólnione wybieramy x_1 – opisujące położenie punktu zawieszenia (pamiętamy, że $y_1 = 0$) i φ – kąt wychylenia wahadła.

Równania transformacyjne mają postać

$$x_2 = x_1 + l \sin\varphi, \qquad y_2 = -l \cos\varphi.$$

Równania ruchu dla układów z więzami

Jako niezależne współrzędne uogólnione wybieramy x_1 – opisujące położenie punktu zawieszenia (pamiętamy, że $y_1 = 0$) i φ – kąt wychylenia wahadła.

Równania transformacyjne mają postać

$$x_2 = x_1 + l \sin\varphi, \qquad y_2 = -l\cos\varphi.$$

Zauważmy, że po wstawieniu tych równań do warunku więzów

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l^2 = 0$$

opisującego stałą długość nici, otrzymamy tożsamość

Równania ruchu dla układów z więzami

Jako niezależne współrzędne uogólnione wybieramy x_1 – opisujące położenie punktu zawieszenia (pamiętamy, że $y_1 = 0$) i φ – kąt wychylenia wahadła.
Równania transformacyjne mają postać

$$x_2 = x_1 + l \sin\varphi, \qquad y_2 = -l \cos\varphi.$$

Zauważmy, że po wstawieniu tych równań do warunku więzów

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l^2 = 0$$

opisującego stałą długość nici, otrzymamy tożsamość (jedynkę trygonometryczną).

Jako niezależne współrzędne uogólnione wybieramy x_1 – opisujące położenie punktu zawieszenia (pamiętamy, że $y_1 = 0$) i φ – kąt wychylenia wahadła.
Równania transformacyjne mają postać

$$x_2 = x_1 + l \sin\varphi, \qquad y_2 = -l\cos\varphi.$$

Zauważmy, że po wstawieniu tych równań do warunku więzów

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l^2 = 0$$

opisującego stałą długość nici, otrzymamy tożsamość (jedynkę trygonometryczną).

Po obliczeniu drugich pochodnych czasowych $\ddot{x}_2$ i $\ddot{y}_2$ i wstawieniu ich do równań ruchu przyjmują one postać

$$m_1 \ddot{x}_1 = Z_{1x}, \tag{1}$$
$$m_1 g = Z_{1y}, \tag{2}$$
$$m_2 \left(\ddot{x}_1 + l \ddot{\varphi} \cos\varphi - l \dot{\varphi}^2 \sin\varphi \right) = Z_{2x}, \tag{3}$$
$$m_2 \left[l \left(\ddot{\varphi} \sin\varphi + \dot{\varphi}^2 \cos\varphi \right) + g \right] = Z_{2y}. \tag{4}$$

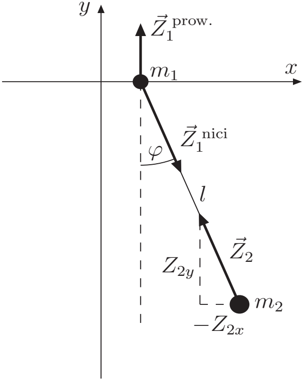
Znów mamy więcej niewiadomych niż równań.

Po obliczeniu drugich pochodnych czasowych $\ddot{x}_2$ i $\ddot{y}_2$ i wstawieniu ich do równań ruchu przyjmują one postać

$$m_1\ddot{x}_1 = Z_{1x}, \tag{1}$$
$$m_1 g = Z_{1y}, \tag{2}$$
$$m_2\left(\ddot{x}_1 + l\ddot{\varphi}\cos\varphi - l\dot{\varphi}^2\sin\varphi\right) = Z_{2x}, \tag{3}$$
$$m_2\left[l\left(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi\right) + g\right] = Z_{2y}. \tag{4}$$

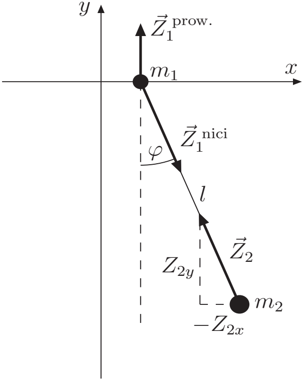
Znów mamy więcej niewiadomych niż równań.

Skorzystajmy z III zasady dynamiki Newtona i z trygonometrii



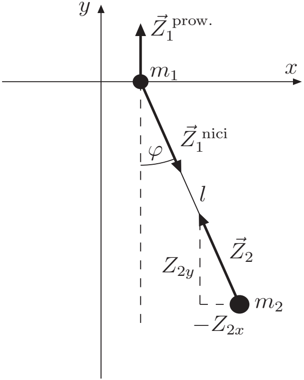
$$\vec{Z}_1^{\text{nici}} = -\vec{Z}_2$$

Skorzystajmy z III zasady dynamiki Newtona i z trygonometrii



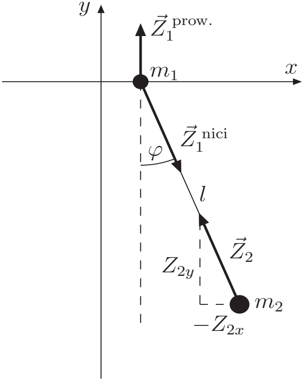
$$\vec{Z}_1^{\,\mathrm{nici}} = -\vec{Z}_2 \quad \Rightarrow$$

Skorzystajmy z III zasady dynamiki Newtona i z trygonometrii



$$\vec{Z}_1^{\,\mathrm{nici}} = -\vec{Z}_2 \quad \Rightarrow \quad Z_{1x} = -Z_{2x},$$

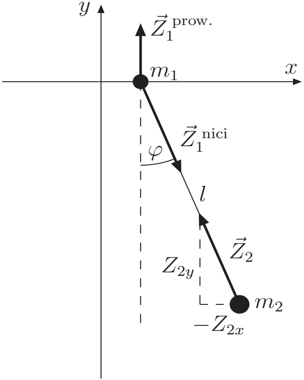
Skorzystajmy z III zasady dynamiki Newtona i z trygonometrii



$$\vec{Z}_1^{\text{nici}} = -\vec{Z}_2 \quad \Rightarrow \quad Z_{1x} = -Z_{2x},$$

$$\frac{-Z_{2x}}{Z_{2y}} = \operatorname{tg}\varphi.$$

Skorzystajmy z III zasady dynamiki Newtona i z trygonometrii



$$\vec{Z}_1^{\text{nici}} = -\vec{Z}_2 \quad \Rightarrow \quad Z_{1x} = -Z_{2x},$$

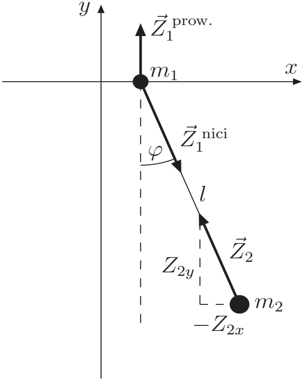
$$\frac{-Z_{2x}}{Z_{2y}} = \operatorname{tg}\varphi.$$

Otrzymaliśmy dwa dodatkowe równania:

$$Z_{1x} + Z_{2x} = 0, \tag{5}$$

$$Z_{2x}\cos\varphi + Z_{2y}\sin\varphi = 0. \tag{6}$$

Skorzystajmy z III zasady dynamiki Newtona i z trygonometrii



$$\vec{Z}_1^{\text{nici}} = -\vec{Z}_2 \quad \Rightarrow \quad Z_{1x} = -Z_{2x},$$

$$\frac{-Z_{2x}}{Z_{2y}} = \operatorname{tg}\varphi.$$

Otrzymaliśmy dwa dodatkowe równania:

$$Z_{1x} + Z_{2x} = 0, \tag{5}$$

$$Z_{2x}\cos\varphi + Z_{2y}\sin\varphi = 0. \tag{6}$$

Równania (1) – (6) można już, przynajmniej z zasady, jednoznacznie rozwiązać.

Dodając stronami równania (1) i (3), a następnie korzystając z (5) otrzymamy

$$(m_1 + m_2)\,\ddot{x}_1 = m_2 l \left(\dot{\varphi}^2 \sin\varphi - \ddot{\varphi}\cos\varphi\right).$$

Równania (1) – (6) można już, przynajmniej z zasady, jednoznacznie rozwiązać.
Dodając stronami równania (1) i (3), a następnie korzystając z (5) otrzymamy

$$(m_1 + m_2)\,\ddot{x}_1 = m_2 l \left(\dot{\varphi}^2 \sin\varphi - \ddot{\varphi}\cos\varphi\right).$$

Z kolei mnożąc równanie (3) przez $\cos\varphi$ a równanie (4) przez $\sin\varphi$ i dodając tak uzyskane równania stronami otrzymamy

$$\ddot{x}_1 \cos\varphi + l\ddot{\varphi} + g\sin\varphi = 0.$$

Równania (1) – (6) można już, przynajmniej z zasady, jednoznacznie rozwiązać.
Dodając stronami równania (1) i (3), a następnie korzystając z (5) otrzymamy

$$(m_1 + m_2)\,\ddot{x}_1 = m_2 l \left(\dot{\varphi}^2 \sin\varphi - \ddot{\varphi}\cos\varphi\right).$$

Z kolei mnożąc równanie (3) przez $\cos\varphi$ a równanie (4) przez $\sin\varphi$ i dodając tak uzyskane równania stronami otrzymamy

$$\ddot{x}_1 \cos\varphi + l\ddot{\varphi} + g\sin\varphi = 0.$$

Koniec przykładu 4.

Równania (1) – (6) można już, przynajmniej z zasady, jednoznacznie rozwiązać.
Dodając stronami równania (1) i (3), a następnie korzystając z (5) otrzymamy

$$(m_1 + m_2)\, \ddot{x}_1 = m_2 l \left(\dot{\varphi}^2 \sin\varphi - \ddot{\varphi} \cos\varphi \right).$$

Z kolei mnożąc równanie (3) przez $\cos\varphi$ a równanie (4) przez $\sin\varphi$ i dodając tak uzyskane równania stronami otrzymamy

$$\ddot{x}_1 \cos\varphi + l\ddot{\varphi} + g \sin\varphi = 0.$$

Koniec przykładu 4.

Równania ruchu dla układów z więzami

Zadanie 5. Rozwiązać układ równań różniczkowych

$$
\begin{aligned}
&(m_1 + m_2)\,\ddot{x}_1 = m_2 l \left(\dot{\varphi}^2 \sin\varphi - \ddot{\varphi}\cos\varphi\right),\\
&\ddot{x}_1 \cos\varphi + l\ddot{\varphi} + g\sin\varphi = 0
\end{aligned}
$$

w przybliżeniu małych wahań. Założyć warunki początkowe postaci

$$
x_1(0) = \dot{x}_1(0) = 0, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}(0) = 0.
$$

Rozwiązanie. W przybliżeniu małych wahań zachodzą przybliżone związki $\sin\varphi \approx \varphi, \quad \cos\varphi \approx 1, \quad \varphi\dot{\varphi}^2 \approx 0$ i nasz układ równań ma postać:

$$
\begin{aligned}
&(m_1 + m_2)\,\ddot{x}_1 = -m_2 l\,\ddot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} l\ddot{\varphi}\\
&\ddot{x}_1 + l\ddot{\varphi} + g\varphi = 0.
\end{aligned}
$$

Zadanie 5. Rozwiązać układ równań różniczkowych

$$(m_1 + m_2)\,\ddot{x}_1 = m_2 l\left(\dot{\varphi}^2 \sin\varphi - \ddot{\varphi}\cos\varphi\right),$$
$$\ddot{x}_1 \cos\varphi + l\ddot{\varphi} + g\sin\varphi = 0$$

w przybliżeniu małych wahań. Założyć warunki początkowe postaci

$$x_1(0) = \dot{x}_1(0) = 0, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}(0) = 0.$$

Rozwiązanie. W przybliżeniu małych wahań zachodzą przybliżone związki $\sin\varphi \approx \varphi, \quad \cos\varphi \approx 1, \quad \varphi\dot{\varphi}^2 \approx 0$ i nasz układ równań ma postać:

$$(m_1 + m_2)\,\ddot{x}_1 = -m_2 l\,\ddot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} l\ddot{\varphi}$$
$$\ddot{x}_1 + l\ddot{\varphi} + g\varphi = 0.$$

Równania ruchu dla układów z więzami

Wstawmy $\ddot{x}_1$ do drugiego równania

$$-\frac{m_2}{m_1+m_2} l\ddot{\varphi} + l\ddot{\varphi} + g\varphi = 0.$$

Uporządkujmy

$$\left(1-\frac{m_2}{m_1+m_2}\right) l\ddot{\varphi} + g\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{m_1}{m_1+m_2} l\ddot{\varphi} = -g\varphi,$$

Skąd

$$\ddot{\varphi} = -\frac{m_1+m_2}{m_1}\,\frac{g}{l}\,\varphi.$$

Wstawmy $\ddot{x}_1$ do drugiego równania

$$-\frac{m_2}{m_1+m_2} l\ddot{\varphi} + l\ddot{\varphi} + g\varphi = 0.$$

Uporządkujmy

$$\left(1 - \frac{m_2}{m_1+m_2}\right) l\ddot{\varphi} + g\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{m_1}{m_1+m_2} l\ddot{\varphi} = -g\varphi,$$

Skąd

$$\ddot{\varphi} = -\frac{m_1+m_2}{m_1} \frac{g}{l} \varphi.$$

Oznaczmy

$$\omega = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1} \frac{g}{l}}$$

Wówczas drugie równanie przyjmie postać

$$\ddot{\varphi} = -\omega^2 \varphi.$$

Oznaczmy

$$\omega = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1} \frac{g}{l}}$$

Wówczas drugie równanie przyjmie postać

$$\ddot{\varphi} = -\omega^2 \varphi.$$

Jest to równanie oscylatora harmonicznego,

Oznaczmy

$$\omega = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1} \frac{g}{l}}$$

Wówczas drugie równanie przyjmie postać

$$\ddot{\varphi} = -\omega^2 \varphi.$$

Jest to równanie oscylatora harmonicznego, którego rozwiązanie ogólne ma postać

$$\varphi(t) = A \cos(\omega t + \alpha).$$

Oznaczmy

$$\omega = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1} \frac{g}{l}}$$

Wówczas drugie równanie przyjmie postać

$$\ddot{\varphi} = -\omega^2 \varphi.$$

Jest to równanie oscylatora harmonicznego, którego rozwiązanie ogólne ma postać

$$\varphi(t) = A \cos(\omega t + \alpha) .$$

Stałe dowolne A i α wyznaczymy z warunków początkowych $\varphi(0) = \varphi_0$ i $\dot{\varphi}(0) = 0$.
W tym celu obliczmy najpierw

$$\dot{\varphi}(t) = -\omega\, A \sin(\omega t + \alpha)$$

Stałe dowolne A i α wyznaczymy z warunków początkowych $\varphi(0) = \varphi_0$ i $\dot{\varphi}(0) = 0$.
W tym celu obliczmy najpierw

$$\dot{\varphi}(t) = -\omega\, A \sin(\omega t + \alpha)$$

i wstawmy $t = 0$ do wzorów na $\varphi(t)$ i $\dot{\varphi}(t)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(t) = A \cos(\omega t + \alpha), \\ \dot{\varphi}(t) = -\omega\, A \sin(\omega t + \alpha) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi(0) = A \cos \alpha = \varphi_0, \\ \dot{\varphi}(0) = -\omega\, A \sin \alpha = 0. \end{array} \right.$$

Stałe dowolne A i α wyznaczymy z warunków początkowych $\varphi(0) = \varphi_0$ i $\dot{\varphi}(0) = 0$.
W tym celu obliczmy najpierw

$$\dot{\varphi}(t) = -\omega\, A \sin\left(\omega t + \alpha\right)$$

i wstawmy $t = 0$ do wzorów na $\varphi(t)$ i $\dot{\varphi}(t)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(t) = A \cos\left(\omega t + \alpha\right), \\ \dot{\varphi}(t) = -\omega\, A \sin\left(\omega t + \alpha\right) \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi(0) = A \cos\alpha = \varphi_0, \\ \dot{\varphi}(0) = -\omega\, A \sin\alpha = 0. \end{array} \right.$$

Najprostszym, fizycznym rozwiązaniem tego układu równań jest $A = \varphi_0$ i $\alpha = 0$.

Równania ruchu dla układów z więzami

Stałe dowolne A i α wyznaczymy z warunków początkowych $\varphi(0) = \varphi_0$ i $\dot{\varphi}(0) = 0$.
W tym celu obliczmy najpierw

$$\dot{\varphi}(t) = -\omega\, A \sin\left(\omega t + \alpha\right)$$

i wstawmy $t = 0$ do wzorów na $\varphi(t)$ i $\dot{\varphi}(t)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(t) = A \cos\left(\omega t + \alpha\right), \\ \dot{\varphi}(t) = -\omega\, A \sin\left(\omega t + \alpha\right) \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi(0) = A \cos\alpha = \varphi_0, \\ \dot{\varphi}(0) = -\omega\, A \sin\alpha = 0. \end{array} \right.$$

Najprostszym, fizycznym rozwiązaniem tego układu równań jest $A = \varphi_0$ i $\alpha = 0$. W takim razie rozwiązanie dla zmiennej kątowej ma postać

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos\omega t.$$

Stałe dowolne A i α wyznaczymy z warunków początkowych $\varphi(0) = \varphi_0$ i $\dot{\varphi}(0) = 0$.
W tym celu obliczmy najpierw

$$\dot{\varphi}(t) = -\omega\, A \sin\left(\omega t + \alpha\right)$$

i wstawmy $t = 0$ do wzorów na $\varphi(t)$ i $\dot{\varphi}(t)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(t) = A \cos\left(\omega t + \alpha\right), \\ \dot{\varphi}(t) = -\omega\, A \sin\left(\omega t + \alpha\right) \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi(0) = A \cos \alpha = \varphi_0, \\ \dot{\varphi}(0) = -\omega\, A \sin \alpha = 0. \end{array} \right.$$

Najprostszym, fizycznym rozwiązaniem tego układu równań jest $A = \varphi_0$ i $\alpha = 0$. W takim razie rozwiązanie dla zmiennej kątowej ma postać

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos \omega t.$$

Wstawmy to rozwiązanie do wzoru na $\ddot{x}_1(t)$

$$\ddot{x}_1(t) = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} l\ddot{\varphi} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} l \left(-\omega^2 \varphi_0 \cos \omega t\right) = \frac{m_2}{m_1} g \varphi_0 \cos \omega t.$$

Scałkujmy obustronnie równanie

$$\ddot{x}_1(t) = \frac{m_2}{m_1} g \varphi_0 \cos \omega t.$$

Wstawmy to rozwiązanie do wzoru na $\ddot{x}_1(t)$

$$\ddot{x}_1(t) = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} l\ddot{\varphi} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} l \left(-\omega^2 \varphi_0 \cos \omega t\right) = \frac{m_2}{m_1} g\varphi_0 \cos \omega t.$$

Scałkujmy obustronnie równanie

$$\ddot{x}_1(t) = \frac{m_2}{m_1} g\varphi_0 \cos \omega t.$$

$$\int\limits_0^t \ddot{x}_1(\tau) \mathrm{d}\tau =$$

Wstawmy to rozwiązanie do wzoru na $\ddot{x}_1(t)$

$$\ddot{x}_1(t) = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} l\ddot{\varphi} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} l \left(-\omega^2 \varphi_0 \cos \omega t\right) = \frac{m_2}{m_1} g \varphi_0 \cos \omega t.$$

Scałkujmy obustronnie równanie

$$\ddot{x}_1(t) = \frac{m_2}{m_1} g \varphi_0 \cos \omega t.$$

$$\int_0^t \ddot{x}_1(\tau) \mathrm{d}\tau = \dot{x}_1(\tau)\Big|_0^t = \dot{x}_1(t) - \dot{x}_1(0) =$$

Wstawmy to rozwiązanie do wzoru na $\ddot{x}_1(t)$

$$\ddot{x}_1(t) = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} l\ddot{\varphi} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} l\left(-\omega^2 \varphi_0 \cos \omega t\right) = \frac{m_2}{m_1} g\varphi_0 \cos \omega t.$$

Scałkujmy obustronnie równanie

$$\ddot{x}_1(t) = \frac{m_2}{m_1} g\varphi_0 \cos \omega t.$$

$$\int_0^t \ddot{x}_1(\tau)\mathrm{d}\tau = \dot{x}_1(\tau)\Big|_0^t = \dot{x}_1(t) - \dot{x}_1(0) = \frac{m_2}{m_1} g\varphi_0 \int_0^t \cos \omega\tau \mathrm{d}\tau$$

Wstawmy to rozwiązanie do wzoru na $\ddot{x}_1(t)$

$$\ddot{x}_1(t) = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} l\ddot{\varphi} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} l \left(-\omega^2 \varphi_0 \cos \omega t\right) = \frac{m_2}{m_1} g \varphi_0 \cos \omega t.$$

Scałkujmy obustronnie równanie

$$\ddot{x}_1(t) = \frac{m_2}{m_1} g \varphi_0 \cos \omega t.$$

$$\int_0^t \ddot{x}_1(\tau) \mathrm{d}\tau = \dot{x}_1(\tau)\Big|_0^t = \dot{x}_1(t) - \dot{x}_1(0) = \frac{m_2}{m_1} g \varphi_0 \int_0^t \cos \omega \tau \mathrm{d}\tau$$

$$= \quad \frac{m_2}{m_1} g \varphi_0 \frac{1}{\omega} \sin \omega \tau \Big|_0^t =$$

Wstawmy to rozwiązanie do wzoru na $\ddot{x}_1(t)$

$$\ddot{x}_1(t) = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} l\ddot{\varphi} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} l \left(-\omega^2 \varphi_0 \cos \omega t\right) = \frac{m_2}{m_1} g \varphi_0 \cos \omega t.$$

Scałkujmy obustronnie równanie

$$\ddot{x}_1(t) = \frac{m_2}{m_1} g \varphi_0 \cos \omega t.$$

$$\int_0^t \ddot{x}_1(\tau) \mathrm{d}\tau = \dot{x}_1(\tau)\Big|_0^t = \dot{x}_1(t) - \dot{x}_1(0) = \frac{m_2}{m_1} g \varphi_0 \int_0^t \cos \omega \tau \mathrm{d}\tau$$

$$= \quad \frac{m_2}{m_1} g \varphi_0 \frac{1}{\omega} \sin \omega \tau \Big|_0^t = \frac{m_2}{m_1} g \varphi_0 \frac{1}{\omega} \sin \omega t.$$

Wstawmy to rozwiązanie do wzoru na $\ddot{x}_1(t)$

$$\ddot{x}_1(t) = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} l\ddot{\varphi} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} l \left(-\omega^2 \varphi_0 \cos \omega t\right) = \frac{m_2}{m_1} g \varphi_0 \cos \omega t.$$

Scałkujmy obustronnie równanie

$$\ddot{x}_1(t) = \frac{m_2}{m_1} g \varphi_0 \cos \omega t.$$

$$\int_0^t \ddot{x}_1(\tau) \mathrm{d}\tau = \dot{x}_1(\tau)\Big|_0^t = \dot{x}_1(t) - \dot{x}_1(0) = \frac{m_2}{m_1} g \varphi_0 \int_0^t \cos \omega\tau \mathrm{d}\tau$$

$$= \frac{m_2}{m_1} g \varphi_0 \frac{1}{\omega} \sin \omega\tau\Big|_0^t = \frac{m_2}{m_1} g \varphi_0 \frac{1}{\omega} \sin \omega t.$$

Scałkujmy ponownie równanie

$$\dot{x}_1(t) = \frac{m_2}{m_1}\,\frac{g\varphi_0}{\omega}\,\sin\omega t.$$

$$\int\limits_0^t \dot{x}_1(\tau)\mathrm{d}\tau = x_1(\tau)\Big|_0^t = x_1(t) - x_1(0) = x_1(t)$$

$$=$$

Równania ruchu dla układów z więzami

Scałkujmy ponownie równanie

$$\dot{x}_1(t) = \frac{m_2}{m_1}\frac{g\varphi_0}{\omega}\sin\omega t.$$

$$\int_0^t \dot{x}_1(\tau)\mathrm{d}\tau = x_1(\tau)\Big|_0^t = x_1(t) - x_1(0) = x_1(t)$$

$$= \frac{m_2}{m_1}\frac{g\varphi_0}{\omega}\int_0^t \sin\omega\tau\mathrm{d}\tau$$

$$= \frac{m_2}{m_1}\frac{g\varphi_0}{\omega}\left(-\frac{1}{\omega}\cos\omega\tau\right)\Big|_0^t = -\frac{m_2}{m_1}g\varphi_0\frac{1}{\omega^2}(\cos\omega t - 1)$$

$$= \frac{m_2}{m_1}g\varphi_0\frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{l}{g}(1-\cos\omega t) = \frac{m_2}{m_1+m_2}l\varphi_0(1-\cos\omega t).$$

Scałkujmy ponownie równanie

$$\dot{x}_1(t) = \frac{m_2}{m_1}\,\frac{g\varphi_0}{\omega}\,\sin\omega t.$$

$$\int_0^t \dot{x}_1(\tau)\mathrm{d}\tau = x_1(\tau)\Big|_0^t = x_1(t) - x_1(0) = x_1(t)$$

$$= \frac{m_2}{m_1}\frac{g\varphi_0}{\omega}\int_0^t \sin\omega\tau\,\mathrm{d}\tau$$

$$= \frac{m_2}{m_1}\frac{g\varphi_0}{\omega}\left(-\frac{1}{\omega}\cos\omega\tau\right)\Big|_0^t = -\frac{m_2}{m_1}g\varphi_0\frac{1}{\omega^2}\left(\cos\omega t - 1\right)$$

$$= \frac{m_2}{m_1}g\varphi_0\frac{m_1}{m_1+m_2}\,\frac{l}{g}\,\left(1-\cos\omega t\right) = \frac{m_2}{m_1+m_2}l\varphi_0\left(1-\cos\omega t\right).$$

Odpowiedź. Rozwiązanie spełniające warunki zadania ma postać

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos\omega t, \quad x_1(t) = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\, l\varphi_0 \left(1 - \cos\omega t\right),$$

gdzie

$$\omega = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1}\,\frac{g}{l}}.$$

Równania ruchu dla układów z więzami

Podsumowanie

- Układy fizyczne z więzami holonomicznymi można rozwiązywać przy użyciu równań Newtona.
- Wymaga to jednak wprowadzenia do równań ruchu sił reakcji więzów, które następnie eliminuje się poprzez analizę geometryczną więzów.
- Równań Newtona nie można rozwiązać jednoznacznie bez dodatkowych założeń co do natury sił reakcji więzów.

W dalszym ciągu kursu mechaniki poznamy formalizm, w którym nie ma potrzeby wprowadzania sił reakcji więzów.

Podsumowanie

- Układy fizyczne z więzami holonomicznymi można rozwiązywać przy użyciu równań Newtona.
- Wymaga to jednak wprowadzenia do równań ruchu sił reakcji więzów, które następnie eliminuje się poprzez analizę geometryczną więzów.
- Równań Newtona nie można rozwiązać jednoznacznie bez dodatkowych założeń co do natury sił reakcji więzów.

W dalszym ciągu kursu mechaniki poznamy formalizm, w którym nie ma potrzeby wprowadzania sił reakcji więzów.