Wiadomości wstępne

Wykład 1

Karol Kołodziej

Instytut Fizyki
Uniwersytet Śląski, Katowice
http://kk.us.edu.pl

Wstęp

Mechanika klasyczna jest nauką o ruchu ciał.
Została zapoczątkowana przez starożytnych Greków.

Mechanika klasyczna jest nauką o ruchu ciał.
Została zapoczątkowana przez starożytnych Greków.
Arystoteles (384–322 p.n.e.) uważał, że aby ciało mogło poruszać się ruchem jednostajnym prostoliniowym trzeba na nie wywierać stałą siłę.

Wstęp

Mechanika klasyczna jest nauką o ruchu ciał.

Została zapoczątkowana przez starożytnych Greków.

Arystoteles (384–322 p.n.e.) uważał, że aby ciało mogło poruszać się ruchem jednostajnym prostoliniowym trzeba na nie wywierać stałą siłę.

Pogląd ten nie był właściwie sprzeczny z codziennymi obserwacjami:

Wstęp

Mechanika klasyczna jest nauką o ruchu ciał.

Została zapoczątkowana przez starożytnych Greków.

Arystoteles (384–322 p.n.e.) uważał, że aby ciało mogło poruszać się ruchem jednostajnym prostoliniowym trzeba na nie wywierać stałą siłę.

Pogląd ten nie był właściwie sprzeczny z codziennymi obserwacjami: na skutek działania sił oporu ruch każdego ciała po pewnym czasie ustaje i aby go podtrzymać trzeba na nie stale działać pewną siłą.

Wstęp

Mechanika klasyczna jest nauką o ruchu ciał.

Została zapoczątkowana przez starożytnych Greków.

Arystoteles (384–322 p.n.e.) uważał, że aby ciało mogło poruszać się ruchem jednostajnym prostoliniowym trzeba na nie wywierać stałą siłę.

Pogląd ten nie był właściwie sprzeczny z codziennymi obserwacjami: na skutek działania sił oporu ruch każdego ciała po pewnym czasie ustaje i aby go podtrzymać trzeba na nie stale działać pewną siłą.

Dziś wiemy jednak, że pogląd ten był niepoprawny.

Wstęp

Mechanika klasyczna jest nauką o ruchu ciał.

Została zapoczątkowana przez starożytnych Greków.

Arystoteles (384–322 p.n.e.) uważał, że aby ciało mogło poruszać się ruchem jednostajnym prostoliniowym trzeba na nie wywierać stałą siłę.

Pogląd ten nie był właściwie sprzeczny z codziennymi obserwacjami: na skutek działania sił oporu ruch każdego ciała po pewnym czasie ustaje i aby go podtrzymać trzeba na nie stale działać pewną siłą.

Dziś wiemy jednak, że pogląd ten był niepoprawny.

Wstęp

Współczesne podejście do mechaniki zapoczątkowali:

- Galileusz (Galileo Galilei) (1564–1642), który podał m.in. prawa ruchu wahadła i spadku swobodnego ciał,
- Isaac Newton (1642–1727), który sformułował 3 słynne zasady dynamiki.

Alternatywne podejście do mechaniki sformułowali:

- Joseph Louis Lagrange (1736–1813),
- William Rowan Hamilton (1805–1865).

Wstęp

Współczesne podejście do mechaniki zapoczątkowali:

- Galileusz (Galileo Galilei) (1564–1642), który podał m.in. prawa ruchu wahadła i spadku swobodnego ciał,
- Isaac Newton (1642–1727), który sformułował 3 słynne zasady dynamiki.

Alternatywne podejście do mechaniki sformułowali:

- Joseph Louis Lagrange (1736–1813),
- William Rowan Hamilton (1805–1865).

Wstęp

Ograniczenia stosowalności praw mechaniki klasycznej

- ciała poruszające się z prędkościami bliskimi prędkości światła w próżni

$$c = 299\,792\,458\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \simeq 300\,000\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

$\Rightarrow$ mechanika relatywistyczna; szczególna teoria względności (Albert Einstein, 1905)

Wstęp

Ograniczenia stosowalności praw mechaniki klasycznej

- ciała poruszające się z prędkościami bliskimi prędkości światła w próżni

$$c = 299\,792\,458\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \simeq 300\,000\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

$\Rightarrow$ mechanika relatywistyczna; szczególna teoria względności (Albert Einstein, 1905)

- ruch mikroskopijnych cząsteczek, atomów i cząstek subatomowych $\Rightarrow$ mechanika kwantowa (Werner Heisenberg, Erwin Schrödinger, 1925)

Ograniczenia stosowalności praw mechaniki klasycznej

- ciała poruszające się z prędkościami bliskimi prędkości światła w próżni

$$c = 299\,792\,458\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \simeq 300\,000\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

  $\Rightarrow$ mechanika relatywistyczna; szczególna teoria względności (Albert Einstein, 1905)

- ruch mikroskopijnych cząsteczek, atomów i cząstek subatomowych $\Rightarrow$ mechanika kwantowa (Werner Heisenberg, Erwin Schrödinger, 1925)

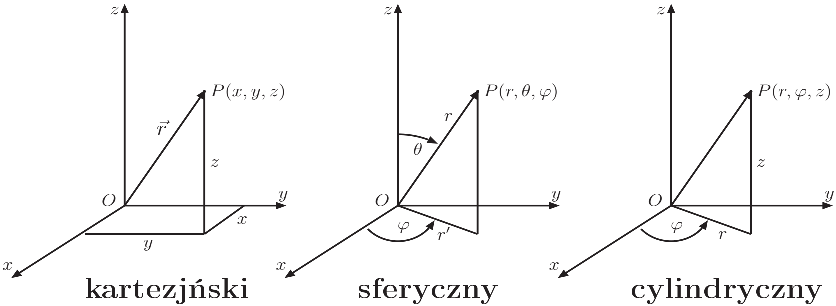
Punkt materialny w przestrzeni

Będziemy operować pojęciem *punktu materialnego,* który jest wyidealizowanym obiektem pozbawionym rozmiarów, ale obdarzonym masą.

Położenie punktu w trójwymiarowej przestrzeni opisujemy w wybranym układzie odniesienia.

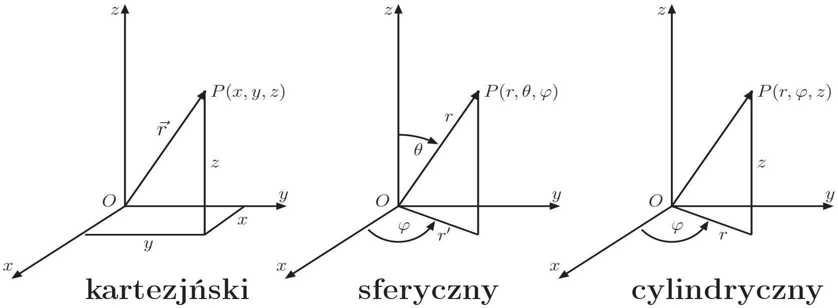
Najczęściej stosowane trójwymiarowe układy współrzędnych:

Będziemy operować pojęciem *punktu materialnego,* który jest wyidealizowanym obiektem pozbawionym rozmiarów, ale obdarzonym masą.
Położenie punktu w trójwymiarowej przestrzeni opisujemy w wybranym układzie odniesienia.
Najczęściej stosowane trójwymiarowe układy współrzędnych:



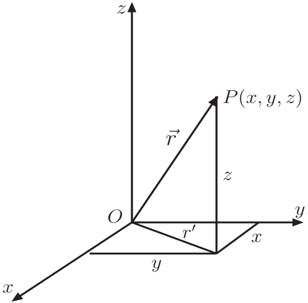
Punkt materialny w przestrzeni

Będziemy operować pojęciem *punktu materialnego,* który jest wyidealizowanym obiektem pozbawionym rozmiarów, ale obdarzonym masą.
Położenie punktu w trójwymiarowej przestrzeni opisujemy w wybranym układzie odniesienia.
Najczęściej stosowane trójwymiarowe układy współrzędnych:



Wektor położenia punktu

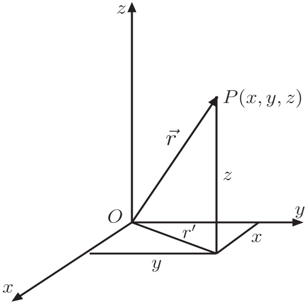
W układzie kartezjańskim wektor położenia (wodzący) $\vec{r}$ łączący początek układu O z punktem $P(x, y, z)$ ma współrzędne:



$$\vec{r} = [x - 0, y - 0, z - 0] = [x, y, z].$$

$\Rightarrow$

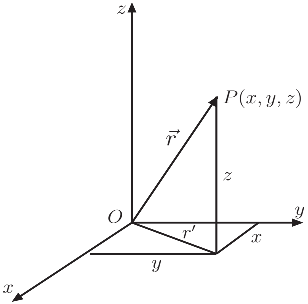
W układzie kartezjańskim wektor położenia (wodzący) $\vec{r}$ łączący początek układu O z punktem $P(x, y, z)$ ma współrzędne:



$$\vec{r} = [x - 0, y - 0, z - 0] = [x, y, z].$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{r}| = \sqrt{r'^2 + z^2}$$

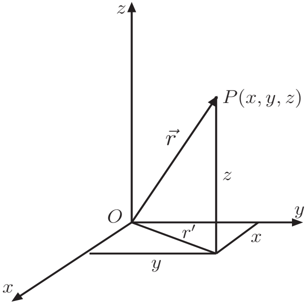
W układzie kartezjańskim wektor położenia (wodzący) $\vec{r}$ łączący początek układu O z punktem $P(x, y, z)$ ma współrzędne:



$$\vec{r} = [x - 0, y - 0, z - 0] = [x, y, z].$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{r}| = \sqrt{r'^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

W układzie kartezjańskim wektor położenia (wodzący) $\vec{r}$ łączący początek układu O z punktem $P(x, y, z)$ ma współrzędne:



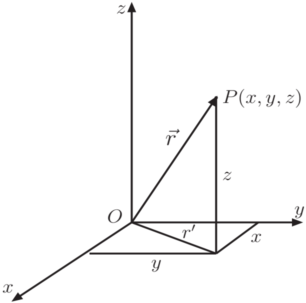
$$\vec{r} = [x - 0, y - 0, z - 0] = [x, y, z].$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{r}| = \sqrt{r'^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Zauważmy, że wektor ten ma dokładnie takie same współrzędne jak punkt P.

Wektor położenia punktu

W układzie kartezjańskim wektor położenia (wodzący) $\vec{r}$ łączący początek układu O z punktem $P(x, y, z)$ ma współrzędne:



$$\vec{r} = [x - 0, y - 0, z - 0] = [x, y, z].$$

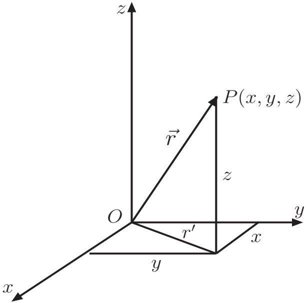
$$\Rightarrow \quad |\vec{r}| = \sqrt{r'^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Zauważmy, że wektor ten ma dokładnie takie same współrzędne jak punkt P.

Dlatego możemy użyć go do opisu położenia punktu materialnego w trakcie ruchu.

Wektor położenia punktu

W układzie kartezjańskim wektor położenia (wodzący) $\vec{r}$ łączący początek układu O z punktem $P(x, y, z)$ ma współrzędne:



$$\vec{r} = [x - 0, y - 0, z - 0] = [x, y, z].$$

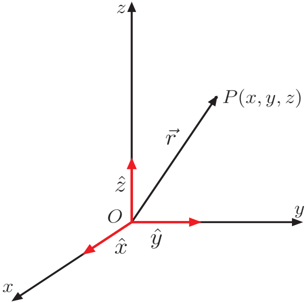
$$\Rightarrow \ |\vec{r}| = \sqrt{r'^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Zauważmy, że wektor ten ma dokładnie takie same współrzędne jak punkt P.

Dlatego możemy użyć go do opisu położenia punktu materialnego w trakcie ruchu.

Wersory

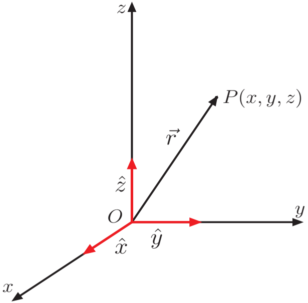
Zdefiniujmy wersory, czyli wektory jednostkowe wzdłuż osi układu kartezjańskiego.



Wersory spełniają relacje:

$$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1,$$

Zdefiniujmy wersory, czyli wektory jednostkowe wzdłuż osi układu kartezjańskiego.

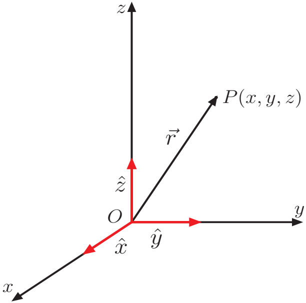


Wersory spełniają relacje:

$$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1, \quad \hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}.$$

Wersory

Zdefiniujmy wersory, czyli wektory jednostkowe wzdłuż osi układu kartezjańskiego.

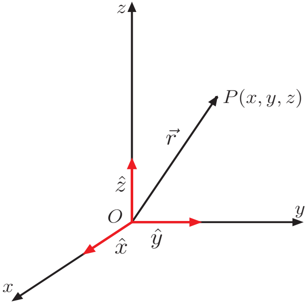


Wersory spełniają relacje:

$$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1, \quad \hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}.$$

Ostatnia równość oznacza, że układ kartezjański jest prawoskrętny.

Zdefiniujmy wersory, czyli wektory jednostkowe wzdłuż osi układu kartezjańskiego.



Wersory spełniają relacje:

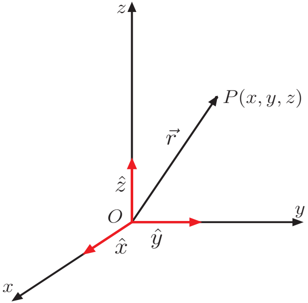
$$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1, \quad \hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}.$$

Ostatnia równość oznacza, że układ kartezjański jest prawoskrętny.

Przy użyciu wersorów wektor ten możemy zapisać w formie:

$$\vec{r} \;=\; [x, y, z] = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + z\,\hat{z}$$

Zdefiniujmy wersory, czyli wektory jednostkowe wzdłuż osi układu kartezjańskiego.



Wersory spełniają relacje:

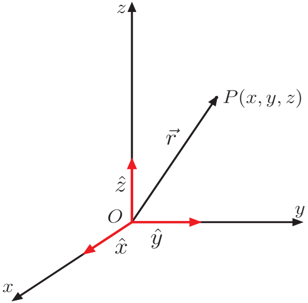
$$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1, \quad \hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}.$$

Ostatnia równość oznacza, że układ kartezjański jest prawoskrętny.

Przy użyciu wersorów wektor ten możemy zapisać w formie:

$$\vec{r} = [x, y, z] = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + z\,\hat{z}$$
$$= [x_1, x_2, x_3]$$

Zdefiniujmy wersory, czyli wektory jednostkowe wzdłuż osi układu kartezjańskiego.



Wersory spełniają relacje:

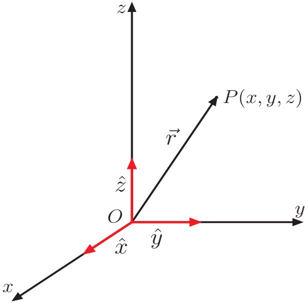
$$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1, \quad \hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}.$$

Ostatnia równość oznacza, że układ kartezjański jest prawoskrętny.

Przy użyciu wersorów wektor ten możemy zapisać w formie:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= [x, y, z] = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + z\,\hat{z} \\ &= [x_1, x_2, x_3] = x_1\,\hat{e}_1 + x_2\,\hat{e}_2 + x_3\,\hat{e}_3.\end{aligned}$$

Zdefiniujmy wersory, czyli wektory jednostkowe wzdłuż osi układu kartezjańskiego.



Wersory spełniają relacje:

$$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1, \quad \hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}.$$

Ostatnia równość oznacza, że układ kartezjański jest prawoskrętny.

Przy użyciu wersorów wektor ten możemy zapisać w formie:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= [x, y, z] = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + z\,\hat{z} \\ &= [x_1, x_2, x_3] = x_1\,\hat{e}_1 + x_2\,\hat{e}_2 + x_3\,\hat{e}_3. \end{aligned}$$

Wektor położenia

Przyjęliśmy tutaj konwencję

$$x = x_1, \quad y = x_2, \quad z = x_3,$$

$$\hat{x} = \hat{e}_1, \quad \hat{y} = \hat{e}_2, \quad \hat{z} = \hat{e}_3,$$

Wektor położenia

Przyjęliśmy tutaj konwencję

$$
\begin{aligned}
x = x_1, \quad y = x_2, \quad z = x_3, \\
\hat{x} = \hat{e}_1, \quad \hat{y} = \hat{e}_2, \quad \hat{z} = \hat{e}_3,
\end{aligned}
$$

która, jak się przekonamy dalej, jest bardzo wygodna.

Wektor położenia

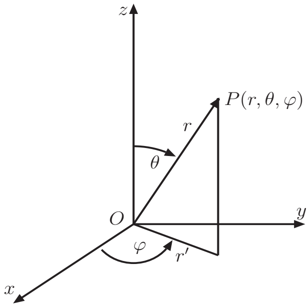
Przyjęliśmy tutaj konwencję

$$x = x_1, \quad y = x_2, \quad z = x_3,$$
$$\hat{x} = \hat{e}_1, \quad \hat{y} = \hat{e}_2, \quad \hat{z} = \hat{e}_3,$$

która, jak się przekonamy dalej, jest bardzo wygodna.

Układ sferyczny

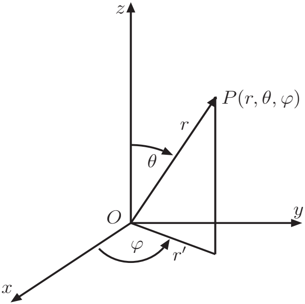
W układzie sferycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od początku układu $r \equiv |\vec{r}|$, oraz kąty: biegunowy θ i azymutalny φ.



Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi są następujące:

Układ sferyczny

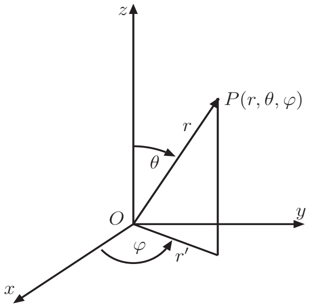
W układzie sferycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od początku układu $r \equiv |\vec{r}|$, oraz kąty: biegunowy θ i azymutalny φ.



Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi są następujące:

$$\begin{cases} x \\ \\ \end{cases}$$

W układzie sferycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od początku układu $r \equiv |\vec{r}|$, oraz kąty: biegunowy θ i azymutalny φ.

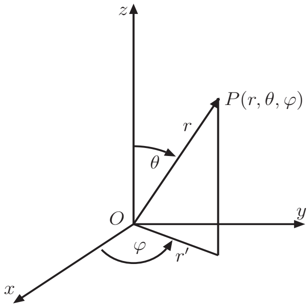


Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi są następujące:

$$\begin{cases} x = \\ \\ \end{cases}$$

Układ sferyczny

W układzie sferycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od początku układu $r \equiv |\vec{r}|$, oraz kąty: biegunowy θ i azymutalny φ.

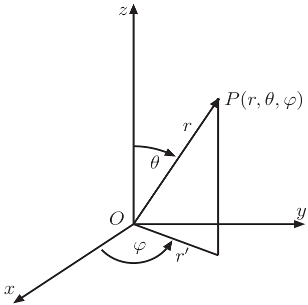


Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi są następujące:

$$\begin{cases} x = r' \cos\varphi \\ \\ \end{cases}$$

Układ sferyczny

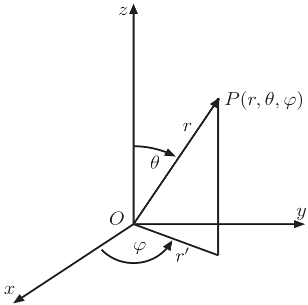
W układzie sferycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od początku układu $r \equiv |\vec{r}|$, oraz kąty: biegunowy θ i azymutalny φ.



Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi są następujące:

$$\begin{cases} x = r' \cos\varphi = r \sin\theta \cos\varphi, \\ \end{cases}$$

W układzie sferycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od początku układu $r \equiv |\vec{r}|$, oraz kąty: biegunowy θ i azymutalny φ.

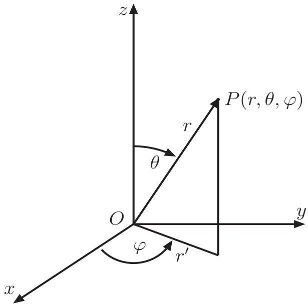


Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi są następujące:

$$\begin{cases} x = r' \cos\varphi = r \sin\theta \cos\varphi, \\ y \end{cases}$$

Układ sferyczny

W układzie sferycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od początku układu $r \equiv |\vec{r}|$, oraz kąty: biegunowy θ i azymutalny φ.

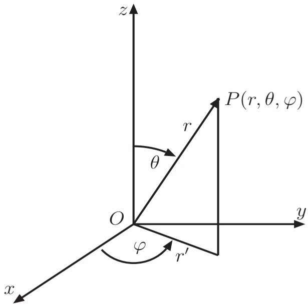


Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi są następujące:

$$\begin{cases} x = r' \cos\varphi = r \sin\theta \cos\varphi, \\ y = \end{cases}$$

Układ sferyczny

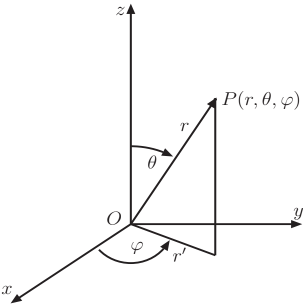
W układzie sferycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od początku układu $r \equiv |\vec{r}|$, oraz kąty: biegunowy θ i azymutalny φ.



Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi są następujące:

$$\begin{cases} x = r' \cos\varphi = r \sin\theta \cos\varphi, \\ y = r' \sin\varphi \end{cases}$$

W układzie sferycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od początku układu $r \equiv |\vec{r}|$, oraz kąty: biegunowy θ i azymutalny φ.

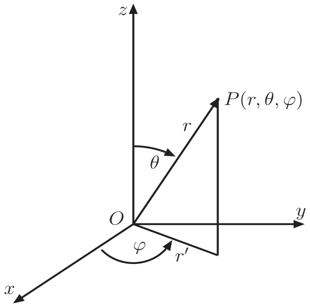


Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi są następujące:

$$\begin{cases} x = r' \cos\varphi = r \sin\theta \cos\varphi, \\ y = r' \sin\varphi = r \sin\theta \sin\varphi, \\ \end{cases}$$

Układ sferyczny

W układzie sferycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od początku układu $r \equiv |\vec{r}|$, oraz kąty: biegunowy θ i azymutalny φ.

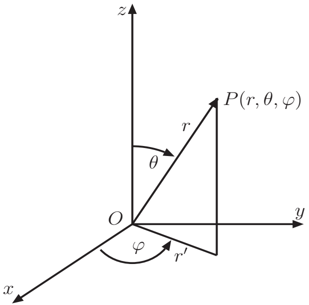


Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi są następujące:

$$\begin{cases} x = r' \cos\varphi = r \sin\theta \cos\varphi, \\ y = r' \sin\varphi = r \sin\theta \sin\varphi, \\ z \end{cases}$$

Układ sferyczny

W układzie sferycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od początku układu $r \equiv |\vec{r}|$, oraz kąty: biegunowy θ i azymutalny φ.

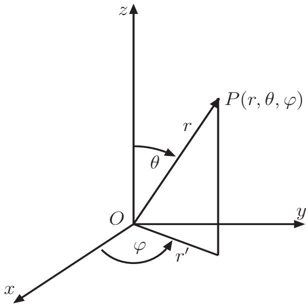


Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi są następujące:

$$\begin{cases} x &= r'\cos\varphi = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y &= r'\sin\varphi = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z &= \end{cases}$$

Układ sferyczny

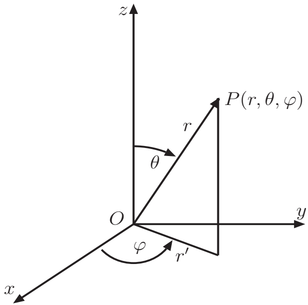
W układzie sferycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od początku układu $r \equiv |\vec{r}|$, oraz kąty: biegunowy θ i azymutalny φ.



Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi są następujące:

$$\begin{cases} x = r' \cos\varphi = r \sin\theta \cos\varphi, \\ y = r' \sin\varphi = r \sin\theta \sin\varphi, \\ z = r \cos\theta, \end{cases}$$

W układzie sferycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od początku układu $r \equiv |\vec{r}|$, oraz kąty: biegunowy θ i azymutalny φ.



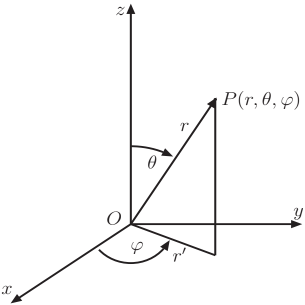
Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi są następujące:

$$\begin{cases} x = r' \cos\varphi = r \sin\theta \cos\varphi, \\ y = r' \sin\varphi = r \sin\theta \sin\varphi, \\ z = r \cos\theta, \end{cases}$$

gdzie $r' = r \sin\theta$.

Układ sferyczny

W układzie sferycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od początku układu $r \equiv |\vec{r}|$, oraz kąty: biegunowy θ i azymutalny φ.



Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi są następujące:

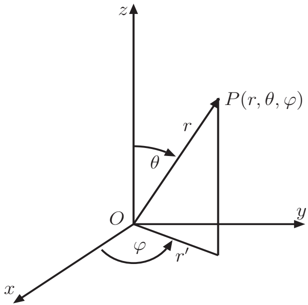
$$\begin{cases} x = r'\cos\varphi = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r'\sin\varphi = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta, \end{cases}$$

gdzie $r' = r\sin\theta$.

Zakresy zmienności współrzędnych sferycznych:

Układ sferyczny

W układzie sferycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od początku układu $r \equiv |\vec{r}|$, oraz kąty: biegunowy θ i azymutalny φ.



Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi są następujące:

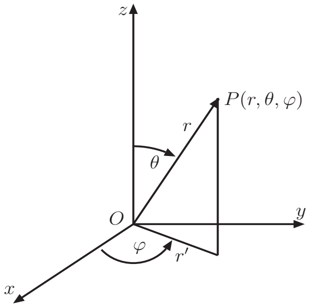
$$\begin{cases} x &= r' \cos\varphi = r \sin\theta \cos\varphi, \\ y &= r' \sin\varphi = r \sin\theta \sin\varphi, \\ z &= r \cos\theta, \end{cases}$$

gdzie $r' = r \sin\theta$.

Zakresy zmienności współrzędnych sferycznych:

$$0 \leqslant r < \infty,$$

W układzie sferycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od początku układu $r \equiv |\vec{r}|$, oraz kąty: biegunowy θ i azymutalny φ.



Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi są następujące:

$$\begin{cases} x = r' \cos\varphi = r \sin\theta \cos\varphi, \\ y = r' \sin\varphi = r \sin\theta \sin\varphi, \\ z = r \cos\theta, \end{cases}$$

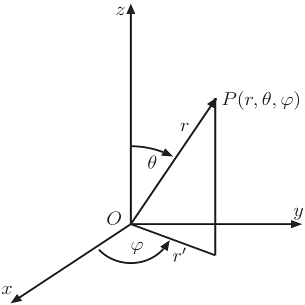
gdzie $r' = r \sin\theta$.

Zakresy zmienności współrzędnych sferycznych:

$$0 \leqslant r < \infty, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,$$

Układ sferyczny

W układzie sferycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od początku układu $r \equiv |\vec{r}|$, oraz kąty: biegunowy θ i azymutalny φ.



Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi są następujące:

$$\begin{cases} x &= r' \cos\varphi = r \sin\theta \cos\varphi, \\ y &= r' \sin\varphi = r \sin\theta \sin\varphi, \\ z &= r \cos\theta, \end{cases}$$

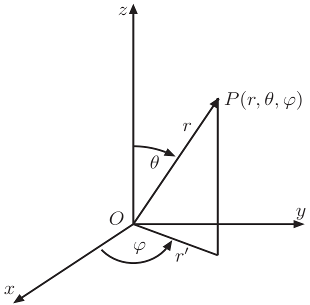
gdzie $r' = r \sin\theta$.

Zakresy zmienności współrzędnych sferycznych:

$$0 \leqslant r < \infty, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

Układ sferyczny

W układzie sferycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od początku układu $r \equiv |\vec{r}|$, oraz kąty: biegunowy θ i azymutalny φ.



Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi są następujące:

$$\begin{cases} x &= r' \cos\varphi = r \sin\theta \cos\varphi, \\ y &= r' \sin\varphi = r \sin\theta \sin\varphi, \\ z &= r \cos\theta, \end{cases}$$

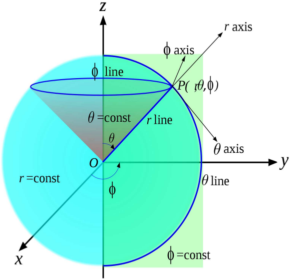
gdzie $r' = r \sin\theta$.

Zakresy zmienności współrzędnych sferycznych:

$$0 \leqslant r < \infty, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

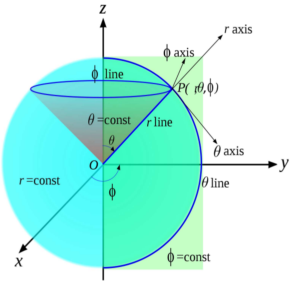
Układ sferyczny - linie stałych współrzędnych

Ustalając jedną ze współrzędnych w układzie sferycznym otrzymamy powierzchnię.



$r = r_0 \quad \Rightarrow$ sfera o promieniu r_0
$\theta = \theta_0 \quad \Rightarrow$ pobocznica stożka o kącie półrozwartości θ_0
$\varphi = \varphi_0 \quad \Rightarrow$ półpłaszczyzna tworząca kąt φ_0 z płaszczyzną xOz.

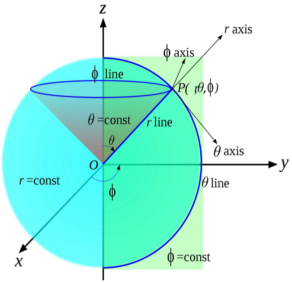
Ustalając jedną ze współrzędnych w układzie sferycznym otrzymamy powierzchnię.



$r = r_0 \quad \Rightarrow$ sfera o promieniu r_0
$\theta = \theta_0 \quad \Rightarrow$ pobocznica stożka o kącie półrozwartości θ_0
$\varphi = \varphi_0 \quad \Rightarrow$ półpłaszczyzna tworząca kąt φ_0 z płaszczyzną xOz.

Ustalając jednocześnie dwie współrzędne otrzymamy linię. Np.
$r = r_0$ i $\theta = \theta_0 \quad \Rightarrow$ okrąg (równoleżnik),
$r = r_0$ i $\varphi = \varphi_0 \quad \Rightarrow$ półokrąg (południk),
$\theta = \theta_0$ i i $\varphi = \varphi_0 \quad \Rightarrow$ półprosta o początku w środku sfery,
gdzie wykorzystaliśmy oczywistą analogię z globusem.

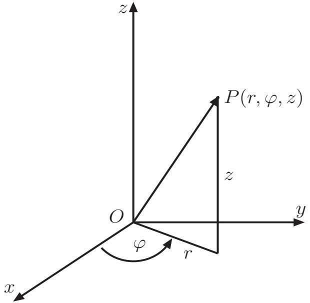
Ustalając jedną ze współrzędnych w układzie sferycznym otrzymamy powierzchnię.



$r = r_0 \quad \Rightarrow$ sfera o promieniu r_0
$\theta = \theta_0 \quad \Rightarrow$ pobocznica stożka o kącie półrozwartości θ_0
$\varphi = \varphi_0 \quad \Rightarrow$ półpłaszczyzna tworząca kąt φ_0 z płaszczyzną xOz.

Ustalając jednocześnie dwie współrzędne otrzymamy linię. Np.
$r = r_0$ i $\theta = \theta_0 \quad \Rightarrow$ okrąg (równoleżnik),
$r = r_0$ i $\varphi = \varphi_0 \quad \Rightarrow$ półokrąg (południk),
$\theta = \theta_0$ i i $\varphi = \varphi_0 \quad \Rightarrow$ półprosta o początku w środku sfery,
gdzie wykorzystaliśmy oczywistą analogię z globusem.

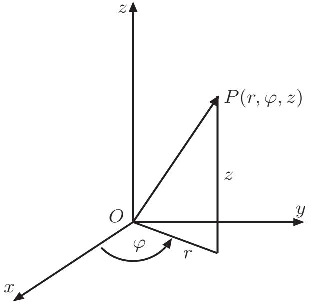
W układzie cylindrycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od wybranej osi r, kąt azymutalny φ oraz wysokość z nad płaszczyznę prostopadłą do wybranej osi, do której należy początek układu O.



Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

W układzie cylindrycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od wybranej osi r, kąt azymutalny φ oraz wysokość z nad płaszczyznę prostopadłą do wybranej osi, do której należy początek układu O.



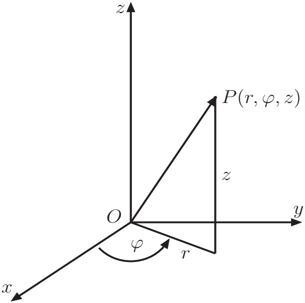
Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Zakresy zmienności współrzędnych cylindrycznych:

Układ cylindryczny

W układzie cylindrycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od wybranej osi r, kąt azymutalny φ oraz wysokość z nad płaszczyznę prostopadłą do wybranej osi, do której należy początek układu O.



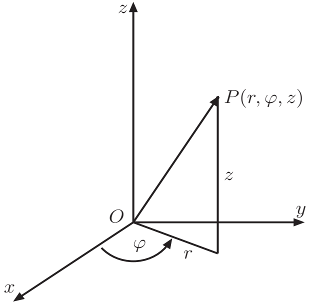
Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Zakresy zmienności współrzędnych cylindrycznych:

$$0 \leqslant r < \infty,$$

W układzie cylindrycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od wybranej osi r, kąt azymutalny φ oraz wysokość z nad płaszczyznę prostopadłą do wybranej osi, do której należy początek układu O.



Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi:

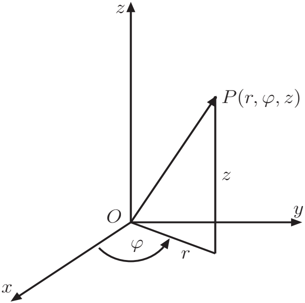
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Zakresy zmienności współrzędnych cylindrycznych:

$$0 \leqslant r < \infty, \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi,$$

Układ cylindryczny

W układzie cylindrycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od wybranej osi r, kąt azymutalny φ oraz wysokość z nad płaszczyznę prostopadłą do wybranej osi, do której należy początek układu O.



Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi:

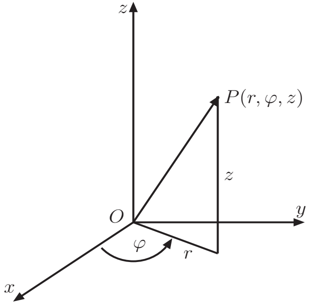
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Zakresy zmienności współrzędnych cylindrycznych:

$$0 \leqslant r < \infty, \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \qquad -\infty < z < \infty.$$

Układ cylindryczny

W układzie cylindrycznym położenie punktu opisujemy podając jego odległość od wybranej osi r, kąt azymutalny φ oraz wysokość z nad płaszczyznę prostopadłą do wybranej osi, do której należy początek układu O.



Związki ze współrzędnymi kartezjańskimi:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Zakresy zmienności współrzędnych cylindrycznych:

$$0 \leqslant r < \infty, \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \qquad -\infty < z < \infty.$$

Zadanie. Jak wyglądają linie stałych współrzędnych w układzie cylindrycznym?
Zauważmy, że linie stałych współrzędnych w układzie sferycznym i cylindrycznym, chociaż mogą być liniami krzywymi, to zawsze przecinają się pod kątami prostymi w każdym punkcie 3-wymiarowej przestrzeni, tzn.

- $P_0(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ w układzie sferycznym i
- $P_0(r_0, \varphi_0, z_0)$ w układzie cylindrycznym.

Dlatego układy sferyczny i cylindryczny nazywamy ortogonalnymi układami współrzędnych.

Zadanie. Jak wyglądają linie stałych współrzędnych w układzie cylindrycznym?

Zauważmy, że linie stałych współrzędnych w układzie sferycznym i cylindrycznym, chociaż mogą być liniami krzywymi, to zawsze przecinają się pod kątami prostymi w każdym punkcie 3-wymiarowej przestrzeni, tzn.

- $P_0(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ w układzie sferycznym i
- $P_0(r_0, \varphi_0, z_0)$ w układzie cylindrycznym.

Dlatego układy sferyczny i cylindryczny nazywamy ortogonalnymi układami współrzędnych.

Konwencja sumacyjna Einsteina

Wektor w przestrzeni trójwymiarowej możemy zapisać

$$\vec{r} = x_1\ \hat{e}_1 + x_2\ \hat{e}_2 + x_3\ \hat{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i\ \hat{e}_i$$

Wektor w przestrzeni trójwymiarowej możemy zapisać

$$\vec{r} = x_1 \ \hat{e}_1 + x_2 \ \hat{e}_2 + x_3 \ \hat{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i \ \hat{e}_i \equiv x_i \ \hat{e}_i,$$

Wektor w przestrzeni trójwymiarowej możemy zapisać

$$\vec{r} = x_1\ \hat{e}_1 + x_2\ \hat{e}_2 + x_3\ \hat{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i\ \hat{e}_i \equiv x_i\ \hat{e}_i,$$

gdzie w ostatniej równości pominęliśmy symbol sumy.

Konwencja sumacyjna Einsteina

Wektor w przestrzeni trójwymiarowej możemy zapisać

$$\vec{r} = x_1 \, \hat{e}_1 + x_2 \, \hat{e}_2 + x_3 \, \hat{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i \, \hat{e}_i \equiv x_i \, \hat{e}_i,$$

gdzie w ostatniej równości pominęliśmy symbol sumy.
Za Einsteinem przyjmiemy następującą konwencję.

Wektor w przestrzeni trójwymiarowej możemy zapisać

$$\vec{r} = x_1\ \hat{e}_1 + x_2\ \hat{e}_2 + x_3\ \hat{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i\ \hat{e}_i \equiv x_i\ \hat{e}_i,$$

gdzie w ostatniej równości pominęliśmy symbol sumy.
Za Einsteinem przyjmiemy następującą konwencję.
Wskaźnik sumacyjny w wyrażeniu iloczynowym zawsze się powtarza (występuje dwukrotnie) dlatego, jeśli tylko zakres sumowania jest oczywisty, możemy pominąć znak sumy.

Konwencja sumacyjna Einsteina

Wektor w przestrzeni trójwymiarowej możemy zapisać

$$\vec{r} = x_1\ \hat{e}_1 + x_2\ \hat{e}_2 + x_3\ \hat{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i\ \hat{e}_i \equiv x_i\ \hat{e}_i,$$

gdzie w ostatniej równości pominęliśmy symbol sumy.
Za Einsteinem przyjmiemy następującą konwencję.
Wskaźnik sumacyjny w wyrażeniu iloczynowym zawsze się powtarza (występuje dwukrotnie) dlatego, jeśli tylko zakres sumowania jest oczywisty, możemy pominąć znak sumy.

Działania na wektorach

Rozważmy dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ w układzie kartezjańskim

$$\vec{a} = [a_1, a_2, a_3] = a_1\,\hat{e}_1 + a_2\,\hat{e}_2 + a_3\,\hat{e}_3$$

Działania na wektorach

Rozważmy dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ w układzie kartezjańskim

$$\vec{a} \quad = \quad [a_1, a_2, a_3] = a_1\ \hat{e}_1 + a_2\ \hat{e}_2 + a_3\ \hat{e}_3 \equiv a_i\ \hat{e}_i,$$

Działania na wektorach

Rozważmy dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ w układzie kartezjańskim

$$\vec{a} = [a_1, a_2, a_3] = a_1\,\hat{e}_1 + a_2\,\hat{e}_2 + a_3\,\hat{e}_3 \equiv a_i\,\hat{e}_i,$$

$$\vec{b}$$

Rozważmy dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ w układzie kartezjańskim

$$\begin{aligned}\vec{a} &= [a_1, a_2, a_3] = a_1\,\hat{e}_1 + a_2\,\hat{e}_2 + a_3\,\hat{e}_3 \equiv a_i\,\hat{e}_i, \\ \vec{b} &= \end{aligned}$$

Działania na wektorach

Rozważmy dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ w układzie kartezjańskim

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= [a_1, a_2, a_3] = a_1\,\hat{e}_1 + a_2\,\hat{e}_2 + a_3\,\hat{e}_3 \equiv a_i\,\hat{e}_i, \\
\vec{b} &= [b_1, b_2, b_3] = b_1\,\hat{e}_1 + b_2\,\hat{e}_2 + b_3\,\hat{e}_3
\end{aligned}$$

Działania na wektorach

Rozważmy dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ w układzie kartezjańskim

$$
\begin{aligned}
\vec{a} &= [a_1, a_2, a_3] = a_1\,\hat{e}_1 + a_2\,\hat{e}_2 + a_3\,\hat{e}_3 \equiv a_i\,\hat{e}_i, \\
\vec{b} &= [b_1, b_2, b_3] = b_1\,\hat{e}_1 + b_2\,\hat{e}_2 + b_3\,\hat{e}_3 \equiv b_i\,\hat{e}_i.
\end{aligned}
$$

Rozważmy dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ w układzie kartezjańskim

$$\begin{aligned}\vec{a} &= [a_1, a_2, a_3] = a_1\ \hat{e}_1 + a_2\ \hat{e}_2 + a_3\ \hat{e}_3 \equiv a_i\ \hat{e}_i, \\ \vec{b} &= [b_1, b_2, b_3] = b_1\ \hat{e}_1 + b_2\ \hat{e}_2 + b_3\ \hat{e}_3 \equiv b_i\ \hat{e}_i.\end{aligned}$$

Suma wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ma postać

$$\vec{a} + \vec{b} =$$

Rozważmy dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ w układzie kartezjańskim

$$
\begin{aligned}
\vec{a} &= [a_1, a_2, a_3] = a_1\,\hat{e}_1 + a_2\,\hat{e}_2 + a_3\,\hat{e}_3 \equiv a_i\,\hat{e}_i, \\
\vec{b} &= [b_1, b_2, b_3] = b_1\,\hat{e}_1 + b_2\,\hat{e}_2 + b_3\,\hat{e}_3 \equiv b_i\,\hat{e}_i.
\end{aligned}
$$

Suma wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ma postać

$$\vec{a} + \vec{b} = [a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3]$$

Rozważmy dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ w układzie kartezjańskim

$$\begin{aligned}\vec{a} &= [a_1, a_2, a_3] = a_1\,\hat{e}_1 + a_2\,\hat{e}_2 + a_3\,\hat{e}_3 \equiv a_i\,\hat{e}_i,\\ \vec{b} &= [b_1, b_2, b_3] = b_1\,\hat{e}_1 + b_2\,\hat{e}_2 + b_3\,\hat{e}_3 \equiv b_i\,\hat{e}_i.\end{aligned}$$

Suma wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ma postać

$$\vec{a} + \vec{b} = [a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3]$$

Rozważmy dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ w układzie kartezjańskim

$$\begin{aligned}\vec{a} &= [a_1, a_2, a_3] = a_1\ \hat{e}_1 + a_2\ \hat{e}_2 + a_3\ \hat{e}_3 \equiv a_i\ \hat{e}_i,\\ \vec{b} &= [b_1, b_2, b_3] = b_1\ \hat{e}_1 + b_2\ \hat{e}_2 + b_3\ \hat{e}_3 \equiv b_i\ \hat{e}_i.\end{aligned}$$

Suma wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ma postać

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= [a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3]\\ &=\end{aligned}$$

Działania na wektorach

Rozważmy dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ w układzie kartezjańskim

$$\begin{aligned}\vec{a} &= [a_1, a_2, a_3] = a_1\,\hat{e}_1 + a_2\,\hat{e}_2 + a_3\,\hat{e}_3 \equiv a_i\,\hat{e}_i,\\ \vec{b} &= [b_1, b_2, b_3] = b_1\,\hat{e}_1 + b_2\,\hat{e}_2 + b_3\,\hat{e}_3 \equiv b_i\,\hat{e}_i.\end{aligned}$$

Suma wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ma postać

$$\begin{aligned}\vec{a}+\vec{b} &= [a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3]\\ &= (a_1+b_1)\,\hat{e}_1 + (a_2+b_2)\,\hat{e}_2 + (a_3+b_3)\,\hat{e}_3\end{aligned}$$

Rozważmy dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ w układzie kartezjańskim

$$\begin{aligned} \vec{a} &= [a_1, a_2, a_3] = a_1\ \hat{e}_1 + a_2\ \hat{e}_2 + a_3\ \hat{e}_3 \equiv a_i\ \hat{e}_i, \\ \vec{b} &= [b_1, b_2, b_3] = b_1\ \hat{e}_1 + b_2\ \hat{e}_2 + b_3\ \hat{e}_3 \equiv b_i\ \hat{e}_i. \end{aligned}$$

Suma wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ma postać

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= [a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3] \\ &= (a_1 + b_1)\ \hat{e}_1 + (a_2 + b_2)\ \hat{e}_2 + (a_3 + b_3)\ \hat{e}_3 \equiv (a_i + b_i)\ \hat{e}_i. \end{aligned}$$

Rozważmy dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ w układzie kartezjańskim

$$\begin{aligned} \vec{a} &= [a_1, a_2, a_3] = a_1\ \hat{e}_1 + a_2\ \hat{e}_2 + a_3\ \hat{e}_3 \equiv a_i\ \hat{e}_i, \\ \vec{b} &= [b_1, b_2, b_3] = b_1\ \hat{e}_1 + b_2\ \hat{e}_2 + b_3\ \hat{e}_3 \equiv b_i\ \hat{e}_i. \end{aligned}$$

Suma wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ma postać

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= [a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3] \\ &= (a_1 + b_1)\ \hat{e}_1 + (a_2 + b_2)\ \hat{e}_2 + (a_3 + b_3)\ \hat{e}_3 \equiv (a_i + b_i)\ \hat{e}_i. \end{aligned}$$

Iloczyn wektora $\vec{a}$ przez liczbę c wyraża się wzorem

$$c\ \vec{a} = [ca_1, ca_2, ca_3]$$

Działania na wektorach

Rozważmy dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ w układzie kartezjańskim

$$\begin{aligned} \vec{a} &= [a_1, a_2, a_3] = a_1\ \hat{e}_1 + a_2\ \hat{e}_2 + a_3\ \hat{e}_3 \equiv a_i\ \hat{e}_i, \\ \vec{b} &= [b_1, b_2, b_3] = b_1\ \hat{e}_1 + b_2\ \hat{e}_2 + b_3\ \hat{e}_3 \equiv b_i\ \hat{e}_i. \end{aligned}$$

Suma wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ma postać

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= [a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3] \\ &= (a_1 + b_1)\ \hat{e}_1 + (a_2 + b_2)\ \hat{e}_2 + (a_3 + b_3)\ \hat{e}_3 \equiv (a_i + b_i)\ \hat{e}_i. \end{aligned}$$

Iloczyn wektora $\vec{a}$ przez liczbę c wyraża się wzorem

$$c\ \vec{a} = [ca_1, ca_2, ca_3] = ca_1\ \hat{e}_1 + ca_2\ \hat{e}_2 + ca_3\ \hat{e}_3$$

Działania na wektorach

Rozważmy dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ w układzie kartezjańskim

$$\begin{aligned} \vec{a} &= [a_1, a_2, a_3] = a_1\ \hat{e}_1 + a_2\ \hat{e}_2 + a_3\ \hat{e}_3 \equiv a_i\ \hat{e}_i, \\ \vec{b} &= [b_1, b_2, b_3] = b_1\ \hat{e}_1 + b_2\ \hat{e}_2 + b_3\ \hat{e}_3 \equiv b_i\ \hat{e}_i. \end{aligned}$$

Suma wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ma postać

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= [a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3] \\ &= (a_1 + b_1)\ \hat{e}_1 + (a_2 + b_2)\ \hat{e}_2 + (a_3 + b_3)\ \hat{e}_3 \equiv (a_i + b_i)\ \hat{e}_i. \end{aligned}$$

Iloczyn wektora $\vec{a}$ przez liczbę c wyraża się wzorem

$$c\ \vec{a} = [ca_1, ca_2, ca_3] = ca_1\ \hat{e}_1 + ca_2\ \hat{e}_2 + ca_3\ \hat{e}_3 \equiv ca_i\ \hat{e}_i.$$

Rozważmy dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ w układzie kartezjańskim

$$\begin{aligned} \vec{a} &= [a_1, a_2, a_3] = a_1\ \hat{e}_1 + a_2\ \hat{e}_2 + a_3\ \hat{e}_3 \equiv a_i\ \hat{e}_i, \\ \vec{b} &= [b_1, b_2, b_3] = b_1\ \hat{e}_1 + b_2\ \hat{e}_2 + b_3\ \hat{e}_3 \equiv b_i\ \hat{e}_i. \end{aligned}$$

Suma wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ma postać

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= [a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3] \\ &= (a_1 + b_1)\ \hat{e}_1 + (a_2 + b_2)\ \hat{e}_2 + (a_3 + b_3)\ \hat{e}_3 \equiv (a_i + b_i)\ \hat{e}_i. \end{aligned}$$

Iloczyn wektora $\vec{a}$ przez liczbę c wyraża się wzorem

$$c\ \vec{a} = [ca_1, ca_2, ca_3] = ca_1\ \hat{e}_1 + ca_2\ \hat{e}_2 + ca_3\ \hat{e}_3 \equiv ca_i\ \hat{e}_i.$$

Działania na wektorach

Iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ definiujemy następująco

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\theta,$$

gdzie θ – kąt pomiędzy wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$.
W układzie kartezjańskim iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ wyraża się wzorem:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = a_i b_i.$$

Iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ definiujemy następująco

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\, |\vec{b}| \cos\theta,$$

gdzie θ – kąt pomiędzy wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$.
W układzie kartezjańskim iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ wyraża się wzorem:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = a_i b_i.$$

Rzeczywiście, zapiszmy $\vec{a} = a_i \hat{e}_i$, $\vec{b} = b_j \hat{e}_j$ i obliczmy

$$\vec{a} \cdot \vec{b} =$$

Iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ definiujemy następująco

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\theta,$$

gdzie θ – kąt pomiędzy wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$.
W układzie kartezjańskim iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ wyraża się wzorem:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = a_i b_i.$$

Rzeczywiście, zapiszmy $\vec{a} = a_i \hat{e}_i$, $\vec{b} = b_j \hat{e}_j$ i obliczmy

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i \hat{e}_i \cdot b_j \hat{e}_j =$$

Iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ definiujemy następująco

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \, |\vec{b}| \cos\theta,$$

gdzie θ – kąt pomiędzy wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$.
W układzie kartezjańskim iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ wyraża się wzorem:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = a_i b_i .$$

Rzeczywiście, zapiszmy $\vec{a} = a_i \hat{e}_i$, $\vec{b} = b_j \hat{e}_j$ i obliczmy

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i \hat{e}_i \cdot b_j \hat{e}_j = a_i b_j \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j =$$

Działania na wektorach

Iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ definiujemy następująco

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta,$$

gdzie θ – kąt pomiędzy wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$.
W układzie kartezjańskim iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ wyraża się wzorem:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = a_i b_i .$$

Rzeczywiście, zapiszmy $\vec{a} = a_i \hat{e}_i$, $\vec{b} = b_j \hat{e}_j$ i obliczmy

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i \hat{e}_i \cdot b_j \hat{e}_j = a_i b_j \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = a_i b_j \delta_{ij} =$$

Iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ definiujemy następująco

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\theta,$$

gdzie θ – kąt pomiędzy wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$.
W układzie kartezjańskim iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ wyraża się wzorem:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = a_i b_i.$$

Rzeczywiście, zapiszmy $\vec{a} = a_i \hat{e}_i$, $\vec{b} = b_j \hat{e}_j$ i obliczmy

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i \hat{e}_i \cdot b_j \hat{e}_j = a_i b_j \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_i,$$

Działania na wektorach

Iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ definiujemy następująco

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\theta,$$

gdzie θ – kąt pomiędzy wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$.
W układzie kartezjańskim iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ wyraża się wzorem:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = a_i b_i.$$

Rzeczywiście, zapiszmy $\vec{a} = a_i \hat{e}_i$, $\vec{b} = b_j \hat{e}_j$ i obliczmy

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i \hat{e}_i \cdot b_j \hat{e}_j = a_i b_j \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_i,$$

gdzie wprowadziliśmy tensor symetryczny δ_{ij}, zwany deltą Kroneckera

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1, & \text{dla} \quad i = j, \\ 0, & \text{dla} \quad i \neq j \end{cases}$$

gdzie wprowadziliśmy tensor symetryczny δ_{ij}, zwany deltą Kroneckera

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1, & \text{dla} \quad i = j, \\ 0, & \text{dla} \quad i \neq j \end{cases}$$

$\Rightarrow$

gdzie wprowadziliśmy tensor symetryczny δ_{ij}, zwany deltą Kroneckera

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1, & \text{dla} \quad i = j, \\ 0, & \text{dla} \quad i \neq j \end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad \delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1,$$

gdzie wprowadziliśmy tensor symetryczny δ_{ij}, zwany deltą Kroneckera

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1, & \text{dla} \quad i = j, \\ 0, & \text{dla} \quad i \neq j \end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad \delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1, \qquad \delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{23} = \ldots = 0.$$

Działania na wektorach

gdzie wprowadziliśmy tensor symetryczny δ_{ij}, zwany deltą Kroneckera

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1, & \mathrm{dla} \quad i = j, \\ 0, & \mathrm{dla} \quad i \neq j \end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad \delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1, \quad \delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{23} = ... = 0.$$

i wykorzystaliśmy relację ortogonalności wersorów kartezjańskiego układu współrzędnych

gdzie wprowadziliśmy tensor symetryczny δ_{ij}, zwany deltą Kroneckera

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1, & \text{dla} \quad i = j, \\ 0, & \text{dla} \quad i \neq j \end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad \delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1, \quad \delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{23} = ... = 0.$$

i wykorzystaliśmy relację ortogonalności wersorów kartezjańskiego układu współrzędnych

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij},$$

gdzie wprowadziliśmy tensor symetryczny δ_{ij}, zwany deltą Kroneckera

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1, & \text{dla} \quad i = j, \\ 0, & \text{dla} \quad i \neq j \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1, \quad \delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{23} = ... = 0.$$

i wykorzystaliśmy relację ortogonalności wersorów kartezjańskiego układu współrzędnych

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij},$$

która łączy w sobie własności ich unormowania, $|\hat{e}_i| = 1$

gdzie wprowadziliśmy tensor symetryczny δ_{ij}, zwany deltą Kroneckera

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1, & \text{dla} \quad i = j, \\ 0, & \text{dla} \quad i \neq j \end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad \delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1, \quad \delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{23} = \ldots = 0.$$

i wykorzystaliśmy relację ortogonalności wersorów kartezjańskiego układu współrzędnych

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij},$$

która łączy w sobie własności ich unormowania, $|\hat{e}_i| = 1$ i wzajemnej ortogonalności $\hat{e}_i \perp \hat{e}_j, \quad i, j = 1, 2, 3.$

gdzie wprowadziliśmy tensor symetryczny δ_{ij}, zwany deltą Kroneckera

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1, & \mathrm{dla} \quad i = j, \\ 0, & \mathrm{dla} \quad i \neq j \end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad \delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1, \quad \delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{23} = ... = 0.$$

i wykorzystaliśmy relację ortogonalności wersorów kartezjańskiego układu współrzędnych

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij},$$

która łączy w sobie własności ich unormowania, $|\hat{e}_i| = 1$ i wzajemnej ortogonalności $\hat{e}_i \perp \hat{e}_j$, $\quad i, j = 1, 2, 3.$

Działania na wektorach

Dla dowolnej wielkości o składowych a_1, a_2, a_3 zachodzi

$$a_j\delta_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Rzeczywiście, dla $i = 1$ *(podobnie dla $i = 2, 3$)* mamy

$$a_j\delta_{1j} =$$

Dla dowolnej wielkości o składowych a_1, a_2, a_3 zachodzi

$$a_j\delta_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Rzeczywiście, dla $i = 1$ *(podobnie dla $i = 2, 3$)* mamy

$$a_j\delta_{1j} = \sum_{j=1}^{3} a_j\delta_{1j}$$

Dla dowolnej wielkości o składowych a_1, a_2, a_3 zachodzi

$$a_j \delta_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Rzeczywiście, dla $i = 1$ *(podobnie dla $i = 2, 3$)* mamy

$$a_j \delta_{1j} = \sum_{j=1}^{3} a_j \delta_{1j} \quad =$$

Dla dowolnej wielkości o składowych a_1, a_2, a_3 zachodzi

$$a_j \delta_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Rzeczywiście, dla $i = 1$ *(podobnie dla $i = 2, 3$)* mamy

$$a_j \delta_{1j} = \sum_{j=1}^{3} a_j \delta_{1j} \quad = \quad a_1 \delta_{11} + a_2 \delta_{12} + a_3 \delta_{13}$$

Dla dowolnej wielkości o składowych a_1, a_2, a_3 zachodzi

$$a_j\delta_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Rzeczywiście, dla $i = 1$ *(podobnie dla $i = 2, 3$)* mamy

$$a_j\delta_{1j} = \sum_{j=1}^{3} a_j\delta_{1j} \quad = \quad a_1\delta_{11} + a_2\delta_{12} + a_3\delta_{13}$$

$$=$$

Dla dowolnej wielkości o składowych a_1, a_2, a_3 zachodzi

$$a_j\delta_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Rzeczywiście, dla $i = 1$ *(podobnie dla $i = 2, 3$)* mamy

$$\begin{aligned} a_j\delta_{1j} = \sum_{j=1}^{3} a_j\delta_{1j} &= a_1\delta_{11} + a_2\delta_{12} + a_3\delta_{13} \\ &= a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 = a_1 . \end{aligned}$$

Dla dowolnej wielkości o składowych a_1, a_2, a_3 zachodzi

$$a_j\delta_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Rzeczywiście, dla $i = 1$ *(podobnie dla $i = 2, 3$)* mamy

$$\begin{aligned} a_j\delta_{1j} = \sum_{j=1}^{3} a_j\delta_{1j} &= a_1\delta_{11} + a_2\delta_{12} + a_3\delta_{13} \\ &= a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 = a_1. \end{aligned}$$

Długość wektora $\vec{a}$ obliczamy następująco

$$a = |\vec{a}|$$

Dla dowolnej wielkości o składowych a_1, a_2, a_3 zachodzi

$$a_j \delta_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Rzeczywiście, dla $i = 1$ *(podobnie dla $i = 2, 3$)* mamy

$$\begin{aligned} a_j \delta_{1j} = \sum_{j=1}^{3} a_j \delta_{1j} &= a_1 \delta_{11} + a_2 \delta_{12} + a_3 \delta_{13} \\ &= a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 = a_1. \end{aligned}$$

Długość wektora $\vec{a}$ obliczamy następująco

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Działania na wektorach

Dla dowolnej wielkości o składowych a_1, a_2, a_3 zachodzi

$$a_j \delta_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Rzeczywiście, dla $i = 1$ *(podobnie dla $i = 2, 3$)* mamy

$$\begin{aligned} a_j \delta_{1j} = \sum_{j=1}^{3} a_j \delta_{1j} &= a_1 \delta_{11} + a_2 \delta_{12} + a_3 \delta_{13} \\ &= a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 = a_1 . \end{aligned}$$

Długość wektora $\vec{a}$ obliczamy następująco

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{a_i a_i}$$

Dla dowolnej wielkości o składowych a_1, a_2, a_3 zachodzi

$$a_j\delta_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Rzeczywiście, dla $i = 1$ *(podobnie dla $i = 2, 3$)* mamy

$$\begin{aligned} a_j\delta_{1j} = \sum_{j=1}^{3} a_j\delta_{1j} &= a_1\delta_{11} + a_2\delta_{12} + a_3\delta_{13} \\ &= a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 = a_1. \end{aligned}$$

Długość wektora $\vec{a}$ obliczamy następująco

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{a_i a_i} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

Działania na wektorach

Dla dowolnej wielkości o składowych a_1, a_2, a_3 zachodzi

$$a_j\delta_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Rzeczywiście, dla $i = 1$ *(podobnie dla $i = 2, 3$)* mamy

$$\begin{aligned} a_j\delta_{1j} = \sum_{j=1}^{3} a_j\delta_{1j} &= a_1\delta_{11} + a_2\delta_{12} + a_3\delta_{13} \\ &= a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 = a_1. \end{aligned}$$

Długość wektora $\vec{a}$ obliczamy następująco

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{a_i a_i} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{\vec{a}^2}.$$

Dla dowolnej wielkości o składowych a_1, a_2, a_3 zachodzi

$$a_j \delta_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Rzeczywiście, dla $i = 1$ *(podobnie dla $i = 2, 3$)* mamy

$$\begin{aligned} a_j \delta_{1j} = \sum_{j=1}^{3} a_j \delta_{1j} &= a_1 \delta_{11} + a_2 \delta_{12} + a_3 \delta_{13} \\ &= a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 = a_1. \end{aligned}$$

Długość wektora $\vec{a}$ obliczamy następująco

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{a_i a_i} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{\vec{a}^2}.$$

Działania na wektorach

Iloczyn wektorowy wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ definiujemy następująco

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}|\ |\vec{b}| \sin\theta\ \hat{e},$$

gdzie $\hat{e}$ jest wektorem jednostkowym prostopadłym do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$, którego zwrot wyznaczamy zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej.

Działania na wektorach

Iloczyn wektorowy wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ definiujemy następująco

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}|\ |\vec{b}| \sin\theta\ \hat{e},$$

gdzie $\hat{e}$ jest wektorem jednostkowym prostopadłym do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$, którego zwrot wyznaczamy zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej.

W układzie kartezjańskim zachodzi wzór:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Działania na wektorach

Iloczyn wektorowy wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ definiujemy następująco

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}|\ |\vec{b}| \sin\theta\ \hat{e},$$

gdzie $\hat{e}$ jest wektorem jednostkowym prostopadłym do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$, którego zwrot wyznaczamy zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej.
W układzie kartezjańskim zachodzi wzór:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\, \hat{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\, \hat{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, \hat{e}_3.$$

Działania na wektorach

Iloczyn wektorowy wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ definiujemy następująco

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\theta\ \hat{e},$$

gdzie $\hat{e}$ jest wektorem jednostkowym prostopadłym do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$, którego zwrot wyznaczamy zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej.
W układzie kartezjańskim zachodzi wzór:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} (a_2 b_3 - a_3 b_2)\,\hat{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\,\hat{e}_2 \\ + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\,\hat{e}_3. \end{array}$$

Zdefiniujmy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civity

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \operatorname{sgn}(i,j,k), & (i,j,k) \text{ permutacja liczb } 1,2,3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Tensor antysymetryczny

Zdefiniujmy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civity

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \mathrm{sgn}(i,j,k), & (i,j,k) \text{ permutacja liczb } 1,2,3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$\Rightarrow$

Tensor antysymetryczny

Zdefiniujmy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civity

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \mathrm{sgn}(i,j,k), & (i,j,k) \text{ permutacja liczb } 1,2,3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{123} = 1,$$

Tensor antysymetryczny

Zdefiniujmy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civity

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \mathrm{sgn}(i,j,k), & (i,j,k) \text{ permutacja liczb } 1,2,3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{123} = 1, \quad \varepsilon_{132} =$$

Zdefiniujmy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civity

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \mathrm{sgn}(i,j,k), & (i,j,k) \text{ permutacja liczb } 1,2,3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{123} = 1, \quad \varepsilon_{132} = -1,$$

Tensor antysymetryczny

Zdefiniujmy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civity

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \operatorname{sgn}(i,j,k), & (i,j,k) \text{ permutacja liczb } 1,2,3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{123} = 1, \quad \varepsilon_{132} = -1, \quad \varepsilon_{213} =$$

Tensor antysymetryczny

Zdefiniujmy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civity

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \mathrm{sgn}(i,j,k), & (i,j,k) \text{ permutacja liczb } 1,2,3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{123} = 1, \quad \varepsilon_{132} = -1, \quad \varepsilon_{213} = -1,$$

Tensor antysymetryczny

Zdefiniujmy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civity

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \mathrm{sgn}(i,j,k), & (i,j,k) \text{ permutacja liczb } 1,2,3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{123} = 1, \quad \varepsilon_{132} = -1, \quad \varepsilon_{213} = -1,$$

$$\varepsilon_{231} =$$

Tensor antysymetryczny

Zdefiniujmy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civity

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \mathrm{sgn}(i,j,k), & (i,j,k) \text{ permutacja liczb } 1,2,3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{123} = 1, \quad \varepsilon_{132} = -1, \quad \varepsilon_{213} = -1,$$
$$\varepsilon_{231} = 1,$$

Tensor antysymetryczny

Zdefiniujmy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civity

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \mathrm{sgn}(i,j,k), & (i,j,k) \text{ permutacja liczb } 1,2,3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{123} = 1, \quad \varepsilon_{132} = -1, \quad \varepsilon_{213} = -1,$$
$$\varepsilon_{231} = 1, \quad \varepsilon_{312} =$$

Zdefiniujmy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civity

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \mathrm{sgn}(i,j,k), & (i,j,k) \text{ permutacja liczb } 1,2,3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{123} = 1, \quad \varepsilon_{132} = -1, \quad \varepsilon_{213} = -1,$$
$$\varepsilon_{231} = 1, \quad \varepsilon_{312} = 1,$$

Zdefiniujmy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civity

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \mathrm{sgn}(i,j,k), & (i,j,k) \text{ permutacja liczb } 1,2,3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{123} = 1, \quad \varepsilon_{132} = -1, \quad \varepsilon_{213} = -1,$$
$$\varepsilon_{231} = 1, \quad \varepsilon_{312} = 1, \quad \varepsilon_{321} =$$

Zdefiniujmy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civity

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \mathrm{sgn}(i,j,k), & (i,j,k) \text{ permutacja liczb } 1,2,3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{lll} \varepsilon_{123} = 1, & \varepsilon_{132} = -1, & \varepsilon_{213} = -1, \\ \varepsilon_{231} = 1, & \varepsilon_{312} = 1, & \varepsilon_{321} = -1, \end{array}$$

Zdefiniujmy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civity

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \mathrm{sgn}(i,j,k), & (i,j,k) \text{ permutacja liczb } 1,2,3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{lll} \varepsilon_{123} = 1, & \varepsilon_{132} = -1, & \varepsilon_{213} = -1, \\ \varepsilon_{231} = 1, & \varepsilon_{312} = 1, & \varepsilon_{321} = -1, \\ \varepsilon_{121} = & & \end{array}$$

Zdefiniujmy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civity

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \mathrm{sgn}(i,j,k), & (i,j,k) \text{ permutacja liczb } 1,2,3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{lll} \varepsilon_{123} = 1, & \varepsilon_{132} = -1, & \varepsilon_{213} = -1, \\ \varepsilon_{231} = 1, & \varepsilon_{312} = 1, & \varepsilon_{321} = -1, \\ \varepsilon_{121} = 0, & & \end{array}$$

Zdefiniujmy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civity

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \mathrm{sgn}(i,j,k), & (i,j,k) \text{ permutacja liczb } 1,2,3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{lll} \varepsilon_{123} = 1, & \varepsilon_{132} = -1, & \varepsilon_{213} = -1, \\ \varepsilon_{231} = 1, & \varepsilon_{312} = 1, & \varepsilon_{321} = -1, \\ \varepsilon_{121} = 0, & \varepsilon_{223} = & \end{array}$$

Zdefiniujmy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civity

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \mathrm{sgn}(i,j,k), & (i,j,k) \text{ permutacja liczb } 1,2,3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{lll} \varepsilon_{123} = 1, & \varepsilon_{132} = -1, & \varepsilon_{213} = -1, \\ \varepsilon_{231} = 1, & \varepsilon_{312} = 1, & \varepsilon_{321} = -1, \\ \varepsilon_{121} = 0, & \varepsilon_{223} = 0, & \end{array}$$

Tensor antysymetryczny

Zdefiniujmy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civity

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \mathrm{sgn}(i,j,k), & (i,j,k) \text{ permutacja liczb } 1,2,3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{lll} \varepsilon_{123} = 1, & \varepsilon_{132} = -1, & \varepsilon_{213} = -1, \\ \varepsilon_{231} = 1, & \varepsilon_{312} = 1, & \varepsilon_{321} = -1, \\ \varepsilon_{121} = 0, & \varepsilon_{223} = 0, & \varepsilon_{333} = \end{array}$$

Tensor antysymetryczny

Zdefiniujmy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civity

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \mathrm{sgn}(i,j,k), & (i,j,k) \text{ permutacja liczb } 1,2,3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{lll} \varepsilon_{123} = 1, & \varepsilon_{132} = -1, & \varepsilon_{213} = -1, \\ \varepsilon_{231} = 1, & \varepsilon_{312} = 1, & \varepsilon_{321} = -1, \\ \varepsilon_{121} = 0, & \varepsilon_{223} = 0, & \varepsilon_{333} = 0, \ldots \end{array}$$

Zdefiniujmy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civity

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \mathrm{sgn}(i,j,k), & (i,j,k) \text{ permutacja liczb } 1,2,3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{lll} \varepsilon_{123} = 1, & \varepsilon_{132} = -1, & \varepsilon_{213} = -1, \\ \varepsilon_{231} = 1, & \varepsilon_{312} = 1, & \varepsilon_{321} = -1, \\ \varepsilon_{121} = 0, & \varepsilon_{223} = 0, & \varepsilon_{333} = 0, \ldots \end{array}$$

Uwaga. Pseudotensor różni się od tensora jedynie sposobem transformacji przy odbiciach przestrzennych, $\vec{r} \longrightarrow -\vec{r}$.

Zdefiniujmy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civity

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \mathrm{sgn}(i,j,k), & (i,j,k) \text{ permutacja liczb } 1,2,3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{lll} \varepsilon_{123} = 1, & \varepsilon_{132} = -1, & \varepsilon_{213} = -1, \\ \varepsilon_{231} = 1, & \varepsilon_{312} = 1, & \varepsilon_{321} = -1, \\ \varepsilon_{121} = 0, & \varepsilon_{223} = 0, & \varepsilon_{333} = 0, \ldots \end{array}$$

Uwaga. Pseudotensor różni się od tensora jedynie sposobem transformacji przy odbiciach przestrzennych, $\vec{r} \longrightarrow -\vec{r}$.
Dlatego często pomija się przedrostek *pseudo* i używa nazwy *tensor.*

Tensor antysymetryczny

Zdefiniujmy pseudotensor antysymetryczny ε_{ijk} Levi-Civity

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \mathrm{sgn}(i,j,k), & (i,j,k) \text{ permutacja liczb } 1,2,3, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{lll} \varepsilon_{123} = 1, & \varepsilon_{132} = -1, & \varepsilon_{213} = -1, \\ \varepsilon_{231} = 1, & \varepsilon_{312} = 1, & \varepsilon_{321} = -1, \\ \varepsilon_{121} = 0, & \varepsilon_{223} = 0, & \varepsilon_{333} = 0, \ldots \end{array}$$

Uwaga. Pseudotensor różni się od tensora jedynie sposobem transformacji przy odbiciach przestrzennych, $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$.
Dlatego często pomija się przedrostek *pseudo* i używa nazwy *tensor*.

Przydatne tożsamości tensorowe

Pokażemy, że i-tą składową iloczynu wektorowego można wyrazić poprzez tensor antysymetryczny w następujący sposób

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Dla dowodu porównajmy wzory

Pokażemy, że i-tą składową iloczynu wektorowego można wyrazić poprzez tensor antysymetryczny w następujący sposób

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Dla dowodu porównajmy wzory

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\hat{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\hat{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\hat{e}_3.$$

Pokażemy, że i-tą składową iloczynu wektorowego można wyrazić poprzez tensor antysymetryczny w następujący sposób

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Dla dowodu porównajmy wzory

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\hat{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\,\hat{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\,\hat{e}_3.$$

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_1$$

Pokażemy, że i-tą składową iloczynu wektorowego można wyrazić poprzez tensor antysymetryczny w następujący sposób

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_i = \varepsilon_{ijk}a_j b_k, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Dla dowodu porównajmy wzory

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\hat{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\hat{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\hat{e}_3.$$

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_1 =$$

Pokażemy, że i-tą składową iloczynu wektorowego można wyrazić poprzez tensor antysymetryczny w następujący sposób

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Dla dowodu porównajmy wzory

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\hat{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\,\hat{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\,\hat{e}_3.$$

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_1 = \varepsilon_{1jk} a_j b_k =$$

Pokażemy, że i-tą składową iloczynu wektorowego można wyrazić poprzez tensor antysymetryczny w następujący sposób

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Dla dowodu porównajmy wzory

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\hat{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\,\hat{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\,\hat{e}_3.$$

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_1 = \varepsilon_{1jk} a_j b_k = \underbrace{\varepsilon_{11k}}_{0} a_1 b_k + \varepsilon_{12k} a_2 b_k + \varepsilon_{13k} a_3 b_k$$

Przydatne tożsamości tensorowe

Pokażemy, że i-tą składową iloczynu wektorowego można wyrazić poprzez tensor antysymetryczny w następujący sposób

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Dla dowodu porównajmy wzory

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\hat{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\,\hat{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\,\hat{e}_3.$$

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_1 = \varepsilon_{1jk} a_j b_k = \underbrace{\varepsilon_{11k}}_{0} a_1 b_k + \varepsilon_{12k} a_2 b_k + \varepsilon_{13k} a_3 b_k$$

$$=$$

Pokażemy, że i-tą składową iloczynu wektorowego można wyrazić poprzez tensor antysymetryczny w następujący sposób

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Dla dowodu porównajmy wzory

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\hat{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\,\hat{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\,\hat{e}_3.$$

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_1 = \varepsilon_{1jk} a_j b_k = \underbrace{\varepsilon_{11k}}_{0} a_1 b_k + \varepsilon_{12k} a_2 b_k + \varepsilon_{13k} a_3 b_k$$

$$= \varepsilon_{123} a_2 b_3 + \varepsilon_{132} a_3 b_2 =$$

Przydatne tożsamości tensorowe

Pokażemy, że i-tą składową iloczynu wektorowego można wyrazić poprzez tensor antysymetryczny w następujący sposób

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Dla dowodu porównajmy wzory

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} (a_2 b_3 - a_3 b_2)\hat{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\,\hat{e}_2 \\ + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\,\hat{e}_3. \end{array} \\
\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_1 &= \varepsilon_{1jk} a_j b_k = \underbrace{\varepsilon_{11k}}_{0} a_1 b_k + \varepsilon_{12k} a_2 b_k + \varepsilon_{13k} a_3 b_k \\
&= \varepsilon_{123} a_2 b_3 + \varepsilon_{132} a_3 b_2 = a_2 b_3 - a_3 b_2,
\end{aligned}$$

Przydatne tożsamości tensorowe

Pokażemy, że i-tą składową iloczynu wektorowego można wyrazić poprzez tensor antysymetryczny w następujący sposób

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Dla dowodu porównajmy wzory

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{aligned}[t] &(a_2 b_3 - a_3 b_2)\hat{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\,\hat{e}_2 \\ &+ (a_1 b_2 - a_2 b_1)\,\hat{e}_3. \end{aligned} \\
\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_1 &= \varepsilon_{1jk} a_j b_k = \underbrace{\varepsilon_{11k}}_{0} a_1 b_k + \varepsilon_{12k} a_2 b_k + \varepsilon_{13k} a_3 b_k \\
&= \varepsilon_{123} a_2 b_3 + \varepsilon_{132} a_3 b_2 = a_2 b_3 - a_3 b_2,
\end{aligned}$$

gdzie najpierw wykonaliśmy sumowanie po wskaźniku j, a w sumowaniu po k uwzględniliśmy tylko wyrazy, dla których tensor ε_{ijk} jest niezerowy.

Dla drugiej i trzeciej składowej otrzymamy

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_2 =$$

gdzie najpierw wykonaliśmy sumowanie po wskaźniku j, a w sumowaniu po k uwzględniliśmy tylko wyrazy, dla których tensor ε_{ijk} jest niezerowy.
Dla drugiej i trzeciej składowej otrzymamy

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_2 = \varepsilon_{2jk} a_j b_k =$$

gdzie najpierw wykonaliśmy sumowanie po wskaźniku j, a w sumowaniu po k uwzględniliśmy tylko wyrazy, dla których tensor ε_{ijk} jest niezerowy.
Dla drugiej i trzeciej składowej otrzymamy

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_2 = \varepsilon_{2jk} a_j b_k = \varepsilon_{21k} a_1 b_k + \underbrace{\varepsilon_{22k}}_{0} a_2 b_k + \varepsilon_{23k} a_3 b_k$$

gdzie najpierw wykonaliśmy sumowanie po wskaźniku j, a w sumowaniu po k uwzględniliśmy tylko wyrazy, dla których tensor ε_{ijk} jest niezerowy.
Dla drugiej i trzeciej składowej otrzymamy

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_2 = \varepsilon_{2jk} a_j b_k = \varepsilon_{21k} a_1 b_k + \underbrace{\varepsilon_{22k}}_{0} a_2 b_k + \varepsilon_{23k} a_3 b_k$$

$$=$$

gdzie najpierw wykonaliśmy sumowanie po wskaźniku j, a w sumowaniu po k uwzględniliśmy tylko wyrazy, dla których tensor ε_{ijk} jest niezerowy.
Dla drugiej i trzeciej składowej otrzymamy

$$\begin{aligned}\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_2 &= \varepsilon_{2jk} a_j b_k = \varepsilon_{21k} a_1 b_k + \underbrace{\varepsilon_{22k}}_{0} a_2 b_k + \varepsilon_{23k} a_3 b_k \\ &= \varepsilon_{213} a_1 b_3 + \varepsilon_{231} a_3 b_1 =\end{aligned}$$

gdzie najpierw wykonaliśmy sumowanie po wskaźniku j, a w sumowaniu po k uwzględniliśmy tylko wyrazy, dla których tensor ε_{ijk} jest niezerowy.
Dla drugiej i trzeciej składowej otrzymamy

$$
\begin{aligned}
\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_2 &= \varepsilon_{2jk} a_j b_k = \varepsilon_{21k} a_1 b_k + \underbrace{\varepsilon_{22k}}_{0} a_2 b_k + \varepsilon_{23k} a_3 b_k \\
&= \varepsilon_{213} a_1 b_3 + \varepsilon_{231} a_3 b_1 = -a_1 b_3 + a_3 b_1 ,
\end{aligned}
$$

gdzie najpierw wykonaliśmy sumowanie po wskaźniku j, a w sumowaniu po k uwzględniliśmy tylko wyrazy, dla których tensor ε_{ijk} jest niezerowy.
Dla drugiej i trzeciej składowej otrzymamy

$$
\begin{aligned}
\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_2 &= \varepsilon_{2jk} a_j b_k = \varepsilon_{21k} a_1 b_k + \underbrace{\varepsilon_{22k}}_{0} a_2 b_k + \varepsilon_{23k} a_3 b_k \\
&= \varepsilon_{213} a_1 b_3 + \varepsilon_{231} a_3 b_1 = -a_1 b_3 + a_3 b_1,
\end{aligned}
$$

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_3$$

gdzie najpierw wykonaliśmy sumowanie po wskaźniku j, a w sumowaniu po k uwzględniliśmy tylko wyrazy, dla których tensor ε_{ijk} jest niezerowy.
Dla drugiej i trzeciej składowej otrzymamy

$$
\begin{aligned}
\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_2 &= \varepsilon_{2jk} a_j b_k = \varepsilon_{21k} a_1 b_k + \underbrace{\varepsilon_{22k}}_{0} a_2 b_k + \varepsilon_{23k} a_3 b_k \\
&= \varepsilon_{213} a_1 b_3 + \varepsilon_{231} a_3 b_1 = -a_1 b_3 + a_3 b_1, \\
\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_3 &=
\end{aligned}
$$

gdzie najpierw wykonaliśmy sumowanie po wskaźniku j, a w sumowaniu po k uwzględniliśmy tylko wyrazy, dla których tensor ε_{ijk} jest niezerowy.
Dla drugiej i trzeciej składowej otrzymamy

$$\begin{aligned}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_2 &= \varepsilon_{2jk}a_j b_k = \varepsilon_{21k}a_1 b_k + \underbrace{\varepsilon_{22k}}_{0} a_2 b_k + \varepsilon_{23k}a_3 b_k \\ &= \varepsilon_{213}a_1 b_3 + \varepsilon_{231}a_3 b_1 = -a_1 b_3 + a_3 b_1, \\ \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_3 &= \varepsilon_{3jk}a_j b_k =\end{aligned}$$

gdzie najpierw wykonaliśmy sumowanie po wskaźniku j, a w sumowaniu po k uwzględniliśmy tylko wyrazy, dla których tensor ε_{ijk} jest niezerowy.

Dla drugiej i trzeciej składowej otrzymamy

$$
\begin{aligned}
\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_2 &= \varepsilon_{2jk} a_j b_k = \varepsilon_{21k} a_1 b_k + \underbrace{\varepsilon_{22k}}_{0} a_2 b_k + \varepsilon_{23k} a_3 b_k \\
&= \varepsilon_{213} a_1 b_3 + \varepsilon_{231} a_3 b_1 = -a_1 b_3 + a_3 b_1, \\
\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_3 &= \varepsilon_{3jk} a_j b_k = \varepsilon_{31k} a_1 b_k + \varepsilon_{32k} a_2 b_k + \underbrace{\varepsilon_{33k}}_{0} a_3 b_k
\end{aligned}
$$

gdzie najpierw wykonaliśmy sumowanie po wskaźniku j, a w sumowaniu po k uwzględniliśmy tylko wyrazy, dla których tensor ε_{ijk} jest niezerowy.
Dla drugiej i trzeciej składowej otrzymamy

$$\begin{aligned}
\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_2 &= \varepsilon_{2jk}a_j b_k = \varepsilon_{21k}a_1 b_k + \underbrace{\varepsilon_{22k}}_{0}a_2 b_k + \varepsilon_{23k}a_3 b_k \\
&= \varepsilon_{213}a_1 b_3 + \varepsilon_{231}a_3 b_1 = -a_1 b_3 + a_3 b_1, \\
\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_3 &= \varepsilon_{3jk}a_j b_k = \varepsilon_{31k}a_1 b_k + \varepsilon_{32k}a_2 b_k + \underbrace{\varepsilon_{33k}}_{0}a_3 b_k \\
&=
\end{aligned}$$

gdzie najpierw wykonaliśmy sumowanie po wskaźniku j, a w sumowaniu po k uwzględniliśmy tylko wyrazy, dla których tensor ε_{ijk} jest niezerowy.
Dla drugiej i trzeciej składowej otrzymamy

$$\begin{aligned}
\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_2 &= \varepsilon_{2jk} a_j b_k = \varepsilon_{21k} a_1 b_k + \underbrace{\varepsilon_{22k}}_{0} a_2 b_k + \varepsilon_{23k} a_3 b_k \\
&= \varepsilon_{213} a_1 b_3 + \varepsilon_{231} a_3 b_1 = -a_1 b_3 + a_3 b_1, \\
\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_3 &= \varepsilon_{3jk} a_j b_k = \varepsilon_{31k} a_1 b_k + \varepsilon_{32k} a_2 b_k + \underbrace{\varepsilon_{33k}}_{0} a_3 b_k \\
&= \varepsilon_{312} a_1 b_2 + \varepsilon_{321} a_2 b_1
\end{aligned}$$

gdzie najpierw wykonaliśmy sumowanie po wskaźniku j, a w sumowaniu po k uwzględniliśmy tylko wyrazy, dla których tensor ε_{ijk} jest niezerowy.
Dla drugiej i trzeciej składowej otrzymamy

$$
\begin{aligned}
\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_2 &= \varepsilon_{2jk}a_j b_k = \varepsilon_{21k}a_1 b_k + \underbrace{\varepsilon_{22k}}_{0} a_2 b_k + \varepsilon_{23k}a_3 b_k \\
&= \varepsilon_{213}a_1 b_3 + \varepsilon_{231}a_3 b_1 = -a_1 b_3 + a_3 b_1, \\
\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_3 &= \varepsilon_{3jk}a_j b_k = \varepsilon_{31k}a_1 b_k + \varepsilon_{32k}a_2 b_k + \underbrace{\varepsilon_{33k}}_{0} a_3 b_k \\
&= \varepsilon_{312}a_1 b_2 + \varepsilon_{321}a_2 b_1 = a_1 b_2 - a_2 b_1,
\end{aligned}
$$

gdzie najpierw wykonaliśmy sumowanie po wskaźniku j, a w sumowaniu po k uwzględniliśmy tylko wyrazy, dla których tensor ε_{ijk} jest niezerowy.

Dla drugiej i trzeciej składowej otrzymamy

$$\begin{aligned}
\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_2 &= \varepsilon_{2jk} a_j b_k = \varepsilon_{21k} a_1 b_k + \underbrace{\varepsilon_{22k}}_{0} a_2 b_k + \varepsilon_{23k} a_3 b_k \\
&= \varepsilon_{213} a_1 b_3 + \varepsilon_{231} a_3 b_1 = -a_1 b_3 + a_3 b_1, \\
\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_3 &= \varepsilon_{3jk} a_j b_k = \varepsilon_{31k} a_1 b_k + \varepsilon_{32k} a_2 b_k + \underbrace{\varepsilon_{33k}}_{0} a_3 b_k \\
&= \varepsilon_{312} a_1 b_2 + \varepsilon_{321} a_2 b_1 = a_1 b_2 - a_2 b_1,
\end{aligned}$$

podczas gdy wzór wyznacznikowy daje

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\hat{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\hat{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\hat{e}_3.$$

gdzie najpierw wykonaliśmy sumowanie po wskaźniku j, a w sumowaniu po k uwzględniliśmy tylko wyrazy, dla których tensor ε_{ijk} jest niezerowy.
Dla drugiej i trzeciej składowej otrzymamy

$$
\begin{aligned}
\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_2 &= \varepsilon_{2jk} a_j b_k = \varepsilon_{21k} a_1 b_k + \underbrace{\varepsilon_{22k}}_{0} a_2 b_k + \varepsilon_{23k} a_3 b_k \\
&= \varepsilon_{213} a_1 b_3 + \varepsilon_{231} a_3 b_1 = -a_1 b_3 + a_3 b_1, \\
\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_3 &= \varepsilon_{3jk} a_j b_k = \varepsilon_{31k} a_1 b_k + \varepsilon_{32k} a_2 b_k + \underbrace{\varepsilon_{33k}}_{0} a_3 b_k \\
&= \varepsilon_{312} a_1 b_2 + \varepsilon_{321} a_2 b_1 = a_1 b_2 - a_2 b_1,
\end{aligned}
$$

podczas gdy wzór wyznacznikowy daje

$$
\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\hat{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\hat{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\hat{e}_3.
$$

Korzystając z własności pseudotensora antysymetrycznego i wyznacznika można udowodnić tożsamość:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}.$$

Dla dowodu sprawdźmy najpierw czy zachodzi równość dla $i = l = 1$, $j = m = 2$, $k = n = 3$.

Przydatne tożsamości tensorowe

Korzystając z własności pseudotensora antysymetrycznego i wyznacznika można udowodnić tożsamość:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}.$$

Dla dowodu sprawdźmy najpierw czy zachodzi równość dla $i = l = 1$, $j = m = 2$, $k = n = 3$.

$$\varepsilon_{123}\,\varepsilon_{123} = 1 \cdot 1 = 1 =$$

Korzystając z własności pseudotensora antysymetrycznego i wyznacznika można udowodnić tożsamość:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}.$$

Dla dowodu sprawdźmy najpierw czy zachodzi równość dla $i = l = 1,\ j = m = 2,\ k = n = 3$.

$$\varepsilon_{123}\,\varepsilon_{123} = 1 \cdot 1 = 1 = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{vmatrix} =$$

Przydatne tożsamości tensorowe

Korzystając z własności pseudotensora antysymetrycznego i wyznacznika można udowodnić tożsamość:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}.$$

Dla dowodu sprawdźmy najpierw czy zachodzi równość dla $i = l = 1$, $j = m = 2$, $k = n = 3$.

$$\varepsilon_{123}\,\varepsilon_{123} = 1 \cdot 1 = 1 = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

Przydatne tożsamości tensorowe

Korzystając z własności pseudotensora antysymetrycznego i wyznacznika można udowodnić tożsamość:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}.$$

Dla dowodu sprawdźmy najpierw czy zachodzi równość dla $i = l = 1$, $j = m = 2$, $k = n = 3$.

$$\varepsilon_{123}\,\varepsilon_{123} = 1 \cdot 1 = 1 = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Korzystając z własności pseudotensora antysymetrycznego i wyznacznika można udowodnić tożsamość:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}.$$

Dla dowodu sprawdźmy najpierw czy zachodzi równość dla $i = l = 1$, $j = m = 2$, $k = n = 3$.

$$\varepsilon_{123}\,\varepsilon_{123} = 1 \cdot 1 = 1 = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Zauważmy, że dwa jednakowe indeksy w pierwszym tensorze odpowiadają dwóm jednakowym wierszom w wyznaczniku, np.

$$\varepsilon_{iik}\varepsilon_{lmn} = 0 \cdot \varepsilon_{lmn} = 0 =$$

Przydatne tożsamości tensorowe

Zauważmy, że dwa jednakowe indeksy w pierwszym tensorze odpowiadają dwóm jednakowym wierszom w wyznaczniku, np.

$$\varepsilon_{iik}\varepsilon_{lmn} = 0 \cdot \varepsilon_{lmn} = 0 = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} =$$

Przydatne tożsamości tensorowe

Zauważmy, że dwa jednakowe indeksy w pierwszym tensorze odpowiadają dwóm jednakowym wierszom w wyznaczniku, np.

$$\varepsilon_{iik}\varepsilon_{lmn} = 0 \cdot \varepsilon_{lmn} = 0 = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} = 0,$$

Zauważmy, że dwa jednakowe indeksy w pierwszym tensorze odpowiadają dwóm jednakowym wierszom w wyznaczniku, np.

$$\varepsilon_{iik}\varepsilon_{lmn} = 0 \cdot \varepsilon_{lmn} = 0 = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} = 0,$$

a dwa jednakowe indeksy w drugim tensorze odpowiadają dwóm jednakowym kolumnom w wyznaczniku,

Przydatne tożsamości tensorowe

Zauważmy, że dwa jednakowe indeksy w pierwszym tensorze odpowiadają dwóm jednakowym wierszom w wyznaczniku, np.

$$\varepsilon_{iik}\varepsilon_{lmn} = 0 \cdot \varepsilon_{lmn} = 0 = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} = 0,$$

a dwa jednakowe indeksy w drugim tensorze odpowiadają dwóm jednakowym kolumnom w wyznaczniku, np.

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{nmn} = \varepsilon_{ijk} \cdot 0 = 0 =$$

Przydatne tożsamości tensorowe

Zauważmy, że dwa jednakowe indeksy w pierwszym tensorze odpowiadają dwóm jednakowym wierszom w wyznaczniku, np.

$$\varepsilon_{iik}\varepsilon_{lmn} = 0 \cdot \varepsilon_{lmn} = 0 = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} = 0,$$

a dwa jednakowe indeksy w drugim tensorze odpowiadają dwóm jednakowym kolumnom w wyznaczniku, np.

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{nmn} = \varepsilon_{ijk} \cdot 0 = 0 = \begin{vmatrix} \delta_{in} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jn} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kn} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} =$$

Zauważmy, że dwa jednakowe indeksy w pierwszym tensorze odpowiadają dwóm jednakowym wierszom w wyznaczniku, np.

$$\varepsilon_{iik}\varepsilon_{lmn} = 0 \cdot \varepsilon_{lmn} = 0 = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} = 0,$$

a dwa jednakowe indeksy w drugim tensorze odpowiadają dwóm jednakowym kolumnom w wyznaczniku, np.

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{nmn} = \varepsilon_{ijk} \cdot 0 = 0 = \begin{vmatrix} \delta_{in} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jn} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kn} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} = 0.$$

Zauważmy, że dwa jednakowe indeksy w pierwszym tensorze odpowiadają dwóm jednakowym wierszom w wyznaczniku, np.

$$\varepsilon_{iik}\varepsilon_{lmn} = 0 \cdot \varepsilon_{lmn} = 0 = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} = 0,$$

a dwa jednakowe indeksy w drugim tensorze odpowiadają dwóm jednakowym kolumnom w wyznaczniku, np.

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{nmn} = \varepsilon_{ijk} \cdot 0 = 0 = \begin{vmatrix} \delta_{in} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jn} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kn} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} = 0.$$

Zauważmy ponadto, że przestawienie dwóch indeksów w tensorze ε_{ijk}, które zmienia jego znak, Zauważmy ponadto, że przestawienie dwóch indeksów w tensorze ε_{ijk}, które zmienia jego znak, odpowiada przestawieniu dwóch wierszy w wyznaczniku,

Zauważmy ponadto, że przestawienie dwóch indeksów w tensorze ε_{ijk}, które zmienia jego znak, odpowiada przestawieniu dwóch wierszy w wyznaczniku, co dokładnie tak samo zmienia znak wyznacznika.

Zauważmy ponadto, że przestawienie dwóch indeksów w tensorze ε_{ijk}, które zmienia jego znak, odpowiada przestawieniu dwóch wierszy w wyznaczniku, co dokładnie tak samo zmienia znak wyznacznika.

Z kolei, przestawienie dwóch indeksów w tensorze ε_{lmn},

Zauważmy ponadto, że przestawienie dwóch indeksów w tensorze ε_{ijk}, które zmienia jego znak, odpowiada przestawieniu dwóch wierszy w wyznaczniku, co dokładnie tak samo zmienia znak wyznacznika.

Z kolei, przestawienie dwóch indeksów w tensorze ε_{lmn}, które zmienia jego znak,

Zauważmy ponadto, że przestawienie dwóch indeksów w tensorze ε_{ijk}, które zmienia jego znak, odpowiada przestawieniu dwóch wierszy w wyznaczniku, co dokładnie tak samo zmienia znak wyznacznika.
Z kolei, przestawienie dwóch indeksów w tensorze ε_{lmn}, które zmienia jego znak, odpowiada przestawieniu dwóch kolumn w wyznaczniku,

Zauważmy ponadto, że przestawienie dwóch indeksów w tensorze ε_{ijk}, które zmienia jego znak, odpowiada przestawieniu dwóch wierszy w wyznaczniku, co dokładnie tak samo zmienia znak wyznacznika.
Z kolei, przestawienie dwóch indeksów w tensorze ε_{lmn}, które zmienia jego znak, odpowiada przestawieniu dwóch kolumn w wyznaczniku, co dokładnie tak samo zmienia znak wyznacznika.

Przydatne tożsamości tensorowe

Zauważmy ponadto, że przestawienie dwóch indeksów w tensorze ε_{ijk}, które zmienia jego znak, odpowiada przestawieniu dwóch wierszy w wyznaczniku, co dokładnie tak samo zmienia znak wyznacznika.

Z kolei, przestawienie dwóch indeksów w tensorze ε_{lmn}, które zmienia jego znak, odpowiada przestawieniu dwóch kolumn w wyznaczniku, co dokładnie tak samo zmienia znak wyznacznika.

A zatem, jeśli wystartujemy z równości wykazanej na początku dowodu i dokonamy dowolnej permutacji indeksów w jednym i/lub drugim tensorze,

Przydatne tożsamości tensorowe

Zauważmy ponadto, że przestawienie dwóch indeksów w tensorze ε_{ijk}, które zmienia jego znak, odpowiada przestawieniu dwóch wierszy w wyznaczniku, co dokładnie tak samo zmienia znak wyznacznika.

Z kolei, przestawienie dwóch indeksów w tensorze ε_{lmn}, które zmienia jego znak, odpowiada przestawieniu dwóch kolumn w wyznaczniku, co dokładnie tak samo zmienia znak wyznacznika.

A zatem, jeśli wystartujemy z równości wykazanej na początku dowodu i dokonamy dowolnej permutacji indeksów w jednym i/lub drugim tensorze, to otrzymamy równość prawdziwą.

Zauważmy ponadto, że przestawienie dwóch indeksów w tensorze ε_{ijk}, które zmienia jego znak, odpowiada przestawieniu dwóch wierszy w wyznaczniku, co dokładnie tak samo zmienia znak wyznacznika.
Z kolei, przestawienie dwóch indeksów w tensorze ε_{lmn}, które zmienia jego znak, odpowiada przestawieniu dwóch kolumn w wyznaczniku, co dokładnie tak samo zmienia znak wyznacznika.
A zatem, jeśli wystartujemy z równości wykazanej na początku dowodu i dokonamy dowolnej permutacji indeksów w jednym i/lub drugim tensorze, to otrzymamy równość prawdziwą.
To kończy dowód tożsamości.

Zauważmy ponadto, że przestawienie dwóch indeksów w tensorze ε_{ijk}, które zmienia jego znak, odpowiada przestawieniu dwóch wierszy w wyznaczniku, co dokładnie tak samo zmienia znak wyznacznika.
Z kolei, przestawienie dwóch indeksów w tensorze ε_{lmn}, które zmienia jego znak, odpowiada przestawieniu dwóch kolumn w wyznaczniku, co dokładnie tak samo zmienia znak wyznacznika.
A zatem, jeśli wystartujemy z równości wykazanej na początku dowodu i dokonamy dowolnej permutacji indeksów w jednym i/lub drugim tensorze, to otrzymamy równość prawdziwą.
To kończy dowód tożsamości.

Przydatne tożsamości tensorowe

Kolejną bardzo przydatną tożsamością jest

$$\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}.$$

W dowodzie wykorzystamy udowodnioną wcześniej tożsamość

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} =$$

Kolejną bardzo przydatną tożsamością jest

$$\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}.$$

W dowodzie wykorzystamy udowodnioną wcześniej tożsamość

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \begin{vmatrix} \delta_{ii} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{ji} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{ki} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} =$$

Kolejną bardzo przydatną tożsamością jest

$$\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}.$$

W dowodzie wykorzystamy udowodnioną wcześniej tożsamość

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \begin{vmatrix} \delta_{ii} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{ji} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{ki} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} \delta_{ii}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{ki} + \delta_{in}\delta_{ji}\delta_{km} \\ -\delta_{in}\delta_{jm}\delta_{ki} - \delta_{ii}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{ji}\delta_{kn} \end{array}$$

Przydatne tożsamości tensorowe

Kolejną bardzo przydatną tożsamością jest

$$\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}.$$

W dowodzie wykorzystamy udowodnioną wcześniej tożsamość

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} &= \begin{vmatrix} \delta_{ii} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{ji} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{ki} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} \delta_{ii}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{ki} + \delta_{in}\delta_{ji}\delta_{km} \\ -\delta_{in}\delta_{jm}\delta_{ki} - \delta_{ii}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{ji}\delta_{kn} \end{array} \\ &= \end{aligned}$$

Kolejną bardzo przydatną tożsamością jest

$$\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}.$$

W dowodzie wykorzystamy udowodnioną wcześniej tożsamość

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} &= \begin{vmatrix} \delta_{ii} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{ji} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{ki} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} = \begin{array}{r} \delta_{ii}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{ki} + \delta_{in}\delta_{ji}\delta_{km} \\ -\delta_{in}\delta_{jm}\delta_{ki} - \delta_{ii}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{ji}\delta_{kn} \end{array} \\ &= 3\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{jn}\delta_{km} + \delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kn} - 3\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kn} \end{aligned}$$

Kolejną bardzo przydatną tożsamością jest

$$\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}.$$

W dowodzie wykorzystamy udowodnioną wcześniej tożsamość

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} &= \begin{vmatrix} \delta_{ii} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{ji} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{ki} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} = \begin{array}{r} \delta_{ii}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{ki} + \delta_{in}\delta_{ji}\delta_{km} \\ -\delta_{in}\delta_{jm}\delta_{ki} - \delta_{ii}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{ji}\delta_{kn} \end{array} \\ &= 3\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{jn}\delta_{km} + \delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kn} - 3\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kn} \\ &= \end{aligned}$$

Przydatne tożsamości tensorowe

Kolejną bardzo przydatną tożsamością jest

$$\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}.$$

W dowodzie wykorzystamy udowodnioną wcześniej tożsamość

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} &= \begin{vmatrix} \delta_{ii} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{ji} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{ki} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} = \begin{array}{r} \delta_{ii}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{ki} + \delta_{in}\delta_{ji}\delta_{km} \\ -\delta_{in}\delta_{jm}\delta_{ki} - \delta_{ii}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{ji}\delta_{kn} \end{array} \\
&= 3\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{jn}\delta_{km} + \delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kn} - 3\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kn} \\
&= \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km},
\end{aligned}$$

Przydatne tożsamości tensorowe

Kolejną bardzo przydatną tożsamością jest

$$\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}.$$

W dowodzie wykorzystamy udowodnioną wcześniej tożsamość

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} &= \begin{vmatrix} \delta_{ii} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{ji} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{ki} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} = \begin{array}{r} \delta_{ii}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{ki} + \delta_{in}\delta_{ji}\delta_{km} \\ -\delta_{in}\delta_{jm}\delta_{ki} - \delta_{ii}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{ji}\delta_{kn} \end{array} \\ &= 3\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{jn}\delta_{km} + \delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kn} - 3\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kn} \\ &= \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}, \end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z równości

$$\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} =$$

gdzie skorzystaliśmy z równości

$$\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 =$$

Przydatne tożsamości tensorowe

gdzie skorzystaliśmy z równości

$$\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 = 3,$$

gdzie skorzystaliśmy z równości

$$\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 = 3,$$

$$\delta_{ki}\delta_{im}$$

gdzie skorzystaliśmy z równości

$$\begin{aligned}\delta_{ii} &= \delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33}=1+1+1=3,\\ \delta_{ki}\delta_{im} &=\end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z równości

$$\begin{aligned}\delta_{ii} &= \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 = 3,\\ \delta_{ki}\delta_{im} &= \delta_{k1}\delta_{1m} + \delta_{k2}\delta_{2m} + \delta_{k3}\delta_{3m} =\end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z równości

$$
\begin{aligned}
\delta_{ii} &= \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 = 3, \\
\delta_{ki}\delta_{im} &= \delta_{k1}\delta_{1m} + \delta_{k2}\delta_{2m} + \delta_{k3}\delta_{3m} = \delta_{km},
\end{aligned}
$$

gdzie skorzystaliśmy z równości

$$\begin{aligned} \delta_{ii} &= \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 = 3, \\ \delta_{ki}\delta_{im} &= \delta_{k1}\delta_{1m} + \delta_{k2}\delta_{2m} + \delta_{k3}\delta_{3m} = \delta_{km}, \end{aligned}$$

gdzyż obie delty Kroneckera w iloczynie są niezerowe tylko jeśli $k = m$.

gdzie skorzystaliśmy z równości

$$\begin{aligned}\delta_{ii} &= \delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33}=1+1+1=3,\\ \delta_{ki}\delta_{im} &= \delta_{k1}\delta_{1m}+\delta_{k2}\delta_{2m}+\delta_{k3}\delta_{3m}=\delta_{km},\end{aligned}$$

gdzyż obie delty Kroneckera w iloczynie są niezerowe tylko jeśli $k=m$.
Tożsamość

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn}=\delta_{jm}\delta_{kn}-\delta_{jn}\delta_{km}$$

Przydatne tożsamości tensorowe

gdzie skorzystaliśmy z równości

$$\begin{aligned} \delta_{ii} &= \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 = 3, \\ \delta_{ki}\delta_{im} &= \delta_{k1}\delta_{1m} + \delta_{k2}\delta_{2m} + \delta_{k3}\delta_{3m} = \delta_{km}, \end{aligned}$$

gdzyż obie delty Kroneckera w iloczynie są niezerowe tylko jeśli $k = m$.
Tożsamość

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$$

łatwo jest zapamiętać, biorąc pod uwagę, że w pierwszym iloczynie delt Kroneckera po prawej stronie łączymy ze sobą drugi indeks z drugim i trzeci z trzecim,

gdzie skorzystaliśmy z równości

$$\begin{aligned}\delta_{ii} &= \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 = 3, \\ \delta_{ki}\delta_{im} &= \delta_{k1}\delta_{1m} + \delta_{k2}\delta_{2m} + \delta_{k3}\delta_{3m} = \delta_{km},\end{aligned}$$

gdzyż obie delty Kroneckera w iloczynie są niezerowe tylko jeśli $k = m$.
Tożsamość

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$$

łatwo jest zapamiętać, biorąc pod uwagę, że w pierwszym iloczynie delt Kroneckera po prawej stronie łączymy ze sobą drugi indeks z drugim i trzeci z trzecim, a w drugim iloczynie łączymy indeksy naprzemiennie.

gdzie skorzystaliśmy z równości

$$\begin{aligned}\delta_{ii} &= \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 = 3,\\ \delta_{ki}\delta_{im} &= \delta_{k1}\delta_{1m} + \delta_{k2}\delta_{2m} + \delta_{k3}\delta_{3m} = \delta_{km},\end{aligned}$$

gdzyż obie delty Kroneckera w iloczynie są niezerowe tylko jeśli $k = m$.
Tożsamość

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$$

łatwo jest zapamiętać, biorąc pod uwagę, że w pierwszym iloczynie delt Kroneckera po prawej stronie łączymy ze sobą drugi indeks z drugim i trzeci z trzecim, a w drugim iloczynie łączymy indeksy naprzemiennie.

Pochodna i jej własności

Przypomnijmy wybrane pojęcia i twierdzenia rachunku różniczkowego.

Pochodna funkcji skalarnej $f(t) \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}\,t} = \lim_{\Delta\, t \to 0} \frac{\Delta f(t)}{\Delta\, t}$$

Przypomnijmy wybrane pojęcia i twierdzenia rachunku różniczkowego.
Pochodna funkcji skalarnej $f(t) \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}\,t} = \lim_{\Delta\,t \to 0} \frac{\Delta f(t)}{\Delta\,t} = \lim_{\Delta\,t \to 0} \frac{f\,(t + \Delta\,t) - f\,(t)}{\Delta\,t}.$$

Pochodna i jej własności

Przypomnijmy wybrane pojęcia i twierdzenia rachunku różniczkowego.

Pochodna funkcji skalarnej $f(t) \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}\,t} = \lim_{\Delta\,t \to 0} \frac{\Delta f(t)}{\Delta\,t} = \lim_{\Delta\,t \to 0} \frac{f\,(t + \Delta\,t) - f\,(t)}{\Delta\,t}.$$

Pochodna funkcji wektorowej $\vec{r}(t)$ o składowych rzeczywistych:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}\,t} = \lim_{\Delta\,t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta\,t}$$

Pochodna i jej własności

Przypomnijmy wybrane pojęcia i twierdzenia rachunku różniczkowego.

Pochodna funkcji skalarnej $f(t) \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}\,t} = \lim_{\Delta\, t \to 0} \frac{\Delta f(t)}{\Delta\, t} = \lim_{\Delta\, t \to 0} \frac{f\,(t + \Delta\, t) - f\,(t)}{\Delta\, t}.$$

Pochodna funkcji wektorowej $\vec{r}(t)$ o składowych rzeczywistych:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}\,t} = \lim_{\Delta\, t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta\, t} = \lim_{\Delta\, t \to 0} \frac{\vec{r}\,(t + \Delta\, t) - \vec{r}\,(t)}{\Delta\, t}.$$

Przypomnijmy wybrane pojęcia i twierdzenia rachunku różniczkowego.
Pochodna funkcji skalarnej $f(t) \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}\,t} = \lim_{\Delta\,t\to 0}\frac{\Delta f(t)}{\Delta\,t} = \lim_{\Delta\,t\to 0}\frac{f\,(t+\Delta\,t) - f\,(t)}{\Delta\,t}.$$

Pochodna funkcji wektorowej $\vec{r}(t)$ o składowych rzeczywistych:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}\,t} = \lim_{\Delta\,t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta\,t} = \lim_{\Delta\,t\to 0}\frac{\vec{r}\,(t+\Delta\,t) - \vec{r}\,(t)}{\Delta\,t}.$$

Pochodna iloczynu funkcji skalarnej $f(t)$ przez liczbę $c \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\mathrm{d}(cf)}{\mathrm{d}\,t} = c\,\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,t}\,.$$

Przypomnijmy wybrane pojęcia i twierdzenia rachunku różniczkowego.
Pochodna funkcji skalarnej $f(t) \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\mathrm{d} f(t)}{\mathrm{d}\, t} = \lim_{\Delta\, t \to 0} \frac{\Delta f(t)}{\Delta\, t} = \lim_{\Delta\, t \to 0} \frac{f\,(t + \Delta\, t) - f\,(t)}{\Delta\, t}.$$

Pochodna funkcji wektorowej $\vec{r}(t)$ o składowych rzeczywistych:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}\, t} = \lim_{\Delta\, t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta\, t} = \lim_{\Delta\, t \to 0} \frac{\vec{r}\,(t + \Delta\, t) - \vec{r}\,(t)}{\Delta\, t}.$$

Pochodna iloczynu funkcji skalarnej $f(t)$ przez liczbę $c \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\mathrm{d}(cf)}{\mathrm{d}\, t} = c\, \frac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d}\, t}\,.$$

Pochodna i jej własności

Pochodna sumy i iloczynu dwóch funkcji skalarnych $f(t)$ i $g(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}(f+g)}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,t} + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\,t},$$

Pochodna sumy i iloczynu dwóch funkcji skalarnych $f(t)$ i $g(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}(f+g)}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,t} + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\,t}, \qquad \frac{\mathrm{d}(fg)}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,t}\,g + f\,\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\,t}.$$

Wzory te łatwo uogólnić na większą liczbę składników lub czynników. Np. dla iloczynu trzech funkcji $f(t)g(t)h(t)$ otrzymamy

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}(fgh)}{\mathrm{d}\,t} &= \frac{\mathrm{d}(fg)}{\mathrm{d}\,t}\,h + (fg)\,\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\,t} = \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,t}\,g + f\,\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\,t}\right)\,h + fg\,\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\,t} \\ &= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,t}\,gh + f\,\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\,t}\,h + fg\,\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\,t} = \dot{f}gh + f\dot{g}h + fg\dot{h},\end{aligned}$$

gdzie przyjęliśmy powszechnie stosowane oznaczenie pochodnej czasowej

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,t} = \dot{f}.$$

Pochodna i jej własności

Pochodna sumy i iloczynu dwóch funkcji skalarnych $f(t)$ i $g(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}(f+g)}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,t} + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\,t}, \qquad \frac{\mathrm{d}(fg)}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,t}\,g + f\,\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\,t}.$$

Wzory te łatwo uogólnić na większą liczbę składników lub czynników. Np. dla iloczynu trzech funkcji $f(t)g(t)h(t)$ otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}(fgh)}{\mathrm{d}\,t} &= \frac{\mathrm{d}(fg)}{\mathrm{d}\,t}\,h + (fg)\,\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\,t} = \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,t}\,g + f\,\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\,t}\right)\,h + fg\,\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\,t} \\ &= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,t}\,gh + f\,\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\,t}\,h + fg\,\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\,t} = \dot{f}gh + f\dot{g}h + fg\dot{h}, \end{aligned}$$

gdzie przyjęliśmy powszechnie stosowane oznaczenie pochodnej czasowej

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,t} = \dot{f}.$$

Różniczkowanie wektorów

Pochodna wektora w układzie o ustalonych – niezmiennych w czasie – osiach:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}\,t} =$$

Różniczkowanie wektorów

Pochodna wektora w układzie o ustalonych – niezmiennych w czasie – osiach:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\left(x_i(t)\hat{e}_i\right)}{\mathrm{d}\,t} =$$

Różniczkowanie wektorów

Pochodna wektora w układzie o ustalonych – niezmiennych w czasie – osiach:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\left(x_i(t)\hat{e}_i\right)}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}\,t}\,\hat{e}_i =$$

Różniczkowanie wektorów

Pochodna wektora w układzie o ustalonych – niezmiennych w czasie – osiach:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\left(x_i(t)\hat{e}_i\right)}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}\,t}\,\hat{e}_i = \dot{x}_i(t)\,\hat{e}_i = v_i(t)\,\hat{e}_i =$$

Pochodna wektora w układzie o ustalonych – niezmiennych w czasie – osiach:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\left(x_i(t)\hat{e}_i\right)}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}\,t}\,\hat{e}_i = \dot{x}_i(t)\,\hat{e}_i = v_i(t)\,\hat{e}_i = \vec{v}(t),$$

Różniczkowanie wektorów

Pochodna wektora w układzie o ustalonych – niezmiennych w czasie – osiach:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\,(x_i(t)\hat{e}_i)}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}\,t}\,\hat{e}_i = \dot{x}_i(t)\,\hat{e}_i = v_i(t)\,\hat{e}_i = \vec{v}(t),$$

gdzie zdefiniowaliśmy wektor prędkości $\vec{v}$ o składowych

$$v_i(t) = \dot{x}_i(t)$$

Różniczkowanie wektorów

Pochodna wektora w układzie o ustalonych – niezmiennych w czasie – osiach:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\left(x_i(t)\hat{e}_i\right)}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}\,t}\,\hat{e}_i = \dot{x}_i(t)\,\hat{e}_i = v_i(t)\,\hat{e}_i = \vec{v}(t),$$

gdzie zdefiniowaliśmy wektor prędkości $\vec{v}$ o składowych

$$v_i(t) = \dot{x}_i(t) = \frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}\,t}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Pochodna wektora w układzie o ustalonych – niezmiennych w czasie – osiach:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\left(x_i(t)\hat{e}_i\right)}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}\,t}\,\hat{e}_i = \dot{x}_i(t)\,\hat{e}_i = v_i(t)\,\hat{e}_i = \vec{v}(t),$$

gdzie zdefiniowaliśmy wektor prędkości $\vec{v}$ o składowych

$$v_i(t) = \dot{x}_i(t) = \frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}\,t}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Pochodna i różniczka funkcji złożonej

Niech $f(t) = f\left(x(t)\right)$, wówczas

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,x}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\,t} =$$

Pochodna i różniczka funkcji złożonej

Niech $f(t) = f\left(x(t)\right)$, wówczas

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,x}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,x}\,\dot{x},$$

Pochodna i różniczka funkcji złożonej

Niech $f(t) = f\left(x(t)\right)$, wówczas

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,x}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,x}\,\dot{x}, \qquad \mathrm{d}f = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,x}\,\mathrm{d}x,$$

Pochodna i różniczka funkcji złożonej

Niech $f(t) = f\left(x(t)\right)$, wówczas

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,x}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,x}\,\dot{x}, \qquad \mathrm{d}f = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,x}\,\mathrm{d}x,$$

Niech $f(t) = f\left(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t), t\right)$,

Pochodna i różniczka funkcji złożonej

Niech $f(t) = f\left(x(t)\right)$, wówczas

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,x}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,x}\,\dot{x}, \qquad \mathrm{d}f = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,x}\,\mathrm{d}x,$$

Niech $f(t) = f\left(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t), t\right)$, wówczas

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,t} =$$

Pochodna i różniczka funkcji złożonej

Niech $f(t) = f\left(x(t)\right)$, wówczas

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,x}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,x}\,\dot{x}, \qquad \mathrm{d}f = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,x}\,\mathrm{d}x,$$

Niech $f(t) = f\left(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t), t\right)$, wówczas

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}\,t} + \frac{\partial f}{\partial t} =$$

Pochodna i różniczka funkcji złożonej

Niech $f(t) = f\,(x(t))$, wówczas

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,x}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,x}\,\dot{x}, \qquad \mathrm{d}f = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,x}\,\mathrm{d}x,$$

Niech $f(t) = f\,(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t), t)$, wówczas

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}\,t} + \frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial f}{\partial t},$$

Niech $f(t) = f\left(x(t)\right)$, wówczas

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,x}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,x}\,\dot{x}, \qquad \mathrm{d}f = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,x}\,\mathrm{d}x,$$

Niech $f(t) = f\left(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t), t\right)$, wówczas

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}\,t} + \frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial f}{\partial t},$$

$$\mathrm{d}f$$

Niech $f(t) = f\left(x(t)\right)$, wówczas

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,x}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,x}\,\dot{x}, \qquad \mathrm{d}f = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,x}\,\mathrm{d}x,$$

Niech $f(t) = f\left(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t), t\right)$, wówczas

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}\,t} + \frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial f}{\partial t},$$

$$\mathrm{d}f =$$

Pochodna i różniczka funkcji złożonej

Niech $f(t) = f\left(x(t)\right)$, wówczas

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,x}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,x}\,\dot{x}, \qquad \mathrm{d}f = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,x}\,\mathrm{d}x,$$

Niech $f(t) = f\left(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t), t\right)$, wówczas

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}\,t} + \frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial f}{\partial t},$$

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i + \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}\,t.$$

Pochodna i różniczka funkcji złożonej

Niech $f(t) = f(x(t))$, wówczas

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,x}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,x}\,\dot{x}, \qquad \mathrm{d}f = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,x}\,\mathrm{d}x,$$

Niech $f(t) = f(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t), t)$, wówczas

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,t} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}\,t} + \frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial f}{\partial t}, \\ \mathrm{d}f &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i + \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}\,t. \end{aligned}$$

Zauważmy, że dla niezależnych zmiennych $x_1, x_2, ..., x_n$ zachodzi

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, ..., n.$$

Pochodna i różniczka funkcji złożonej

Niech $f(t) = f\,(x(t))$, wówczas

$$\frac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d}\, t} = \frac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d}\, x}\,\frac{\mathrm{d} x}{\mathrm{d}\, t} = \frac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d}\, x}\,\dot{x}, \qquad \mathrm{d} f = \frac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d}\, x}\,\mathrm{d} x,$$

Niech $f(t) = f\,(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t), t)$, wówczas

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d}\, t} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\mathrm{d} x_i}{\mathrm{d}\, t} + \frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial f}{\partial t}, \\ \mathrm{d} f &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d} x_i + \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}\, t. \end{aligned}$$

Zauważmy, że dla niezależnych zmiennych $x_1, x_2, ..., x_n$ zachodzi

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, ..., n.$$

Przykładowo, zastosujmy wzór

$$\frac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d}\, t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial f}{\partial t}$$

do funkcji wyrażającej współrzędną x układu kartezjańskiego przez współrzędne sferyczne, z których każda zależy od czasu

$$x(t) = x(r(t), \theta(t), \varphi(t)) = r(t) \sin\theta(t) \cos\varphi(t).$$

Wówczas otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d} x}{\mathrm{d}\, t} &= \dot{x} = \frac{\partial x}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial x}{\partial \theta}\dot{\theta} + \frac{\partial x}{\partial \varphi}\dot{\varphi} \\ &= \sin\theta\cos\varphi\dot{r} + r\cos\theta\cos\varphi\dot{\theta} - r\sin\theta\sin\varphi\dot{\varphi}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że nie pojawił się tu wyraz $\frac{\partial x}{\partial t}$, gdyż funkcja $x(t)$ nie zależy jawnie od czasu, tzn. zależy od czasu tylko poprzez $r(t)$, $\theta(t)$ i $\varphi(t)$.

Przykładowo, zastosujmy wzór

$$\frac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d}\, t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial f}{\partial t}$$

do funkcji wyrażającej współrzędną x układu kartezjańskiego przez współrzędne sferyczne, z których każda zależy od czasu

$$x(t) = x(r(t), \theta(t), \varphi(t)) = r(t) \sin\theta(t) \cos\varphi(t).$$

Wówczas otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d} x}{\mathrm{d}\, t} &= \dot{x} = \frac{\partial x}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial x}{\partial \theta}\dot{\theta} + \frac{\partial x}{\partial \varphi}\dot{\varphi} \\ &= \sin\theta\cos\varphi\dot{r} + r\cos\theta\cos\varphi\dot{\theta} - r\sin\theta\sin\varphi\dot{\varphi}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że nie pojawił się tu wyraz $\frac{\partial x}{\partial t}$, gdyż funkcja $x(t)$ nie zależy jawnie od czasu, tzn. zależy od czasu tylko poprzez $r(t)$, $\theta(t)$ i $\varphi(t)$.

Zadanie. Obliczyć pochodne czasowe funkcji wyrażających współrzędne y i z układu kartezjańskiego przez współrzędne sferyczne:

$$\begin{aligned} y(t) &= y(r(t),\theta(t),\varphi(t)) = r(t)\sin\theta(t)\sin\varphi(t), \\ z(t) &= z(r(t),\theta(t)) = r(t)\cos\theta(t). \end{aligned}$$

Układ inercjalny to układ odniesienia S, w którym spełniona jest I zasada dynamiki Newtona:

Jeżeli na ciało nie działa żadna siła, to porusza się ono ruchem jednostajnym prostoliniowym lub pozostaje w spoczynku.

Układy inercjalne

Układ inercjalny to układ odniesienia S, w którym spełniona jest I zasada dynamiki Newtona:
Jeżeli na ciało nie działa żadna siła, to porusza się ono ruchem jednostajnym prostoliniowym lub pozostaje w spoczynku.
Zasada ta obowiązuje również dla prędkości relatywistycznych.

Układy inercjalne

Układ inercjalny to układ odniesienia S, w którym spełniona jest I zasada dynamiki Newtona:

Jeżeli na ciało nie działa żadna siła, to porusza się ono ruchem jednostajnym prostoliniowym lub pozostaje w spoczynku.

Zasada ta obowiązuje również dla prędkości relatywistycznych.

Uwaga. Prędkości znacznie mniejsze od prędkości światła w próżni

$$\boxed{\mathrm{v} \ll \mathbf{c} = \mathbf{299\ 792\ 458}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx \mathbf{3} \times \mathbf{10^8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx \mathbf{300\ 000}\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}.}$$

nazywamy prędkościami nierelatywistycznymi,

Układ inercjalny to układ odniesienia S, w którym spełniona jest I zasada dynamiki Newtona:
Jeżeli na ciało nie działa żadna siła, to porusza się ono ruchem jednostajnym prostoliniowym lub pozostaje w spoczynku.
Zasada ta obowiązuje również dla prędkości relatywistycznych.
Uwaga. Prędkości znacznie mniejsze od prędkości światła w próżni

$$\boxed{\mathrm{v} \ll \mathbf{c} = \mathbf{299\ 792\ 458}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx \mathbf{3} \times \mathbf{10^8} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx \mathbf{300\ 000}\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}.}$$

nazywamy prędkościami nierelatywistycznymi, natomiast prędkości porównywalne z prędkością światła w próżni nazywamy prędkościami relatywistycznymi.

Układ inercjalny to układ odniesienia S, w którym spełniona jest I zasada dynamiki Newtona:
Jeżeli na ciało nie działa żadna siła, to porusza się ono ruchem jednostajnym prostoliniowym lub pozostaje w spoczynku.
Zasada ta obowiązuje również dla prędkości relatywistycznych.
Uwaga. Prędkości znacznie mniejsze od prędkości światła w próżni

$$\boxed{\mathrm{v} \ll \mathbf{c} = \mathbf{299\ 792\ 458}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx \mathbf{3} \times \mathbf{10^8}\, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx \mathbf{300\ 000}\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}.}$$

nazywamy prędkościami nierelatywistycznymi, natomiast prędkości porównywalne z prędkością światła w próżni nazywamy prędkościami relatywistycznymi.

Układy inercjalne

Każdy inny układ poruszający się względem układu inercjalnego S ruchem jednostajnym prostoliniowym lub pozostający względem niego w spoczynku jest układem inercjalnym.

II zasada dynamiki, przyspieszenie

Jeżeli na ciało działa siła $\vec{F}$, to porusza się ono ruchem przyspieszonym, z przyspieszeniem proporcjonalnym do siły $\vec{F}$ i odwrotnie proporcjonalnym do masy ciała.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = m\vec{a}.$$

(obowiązuje tylko dla prędkości nierelatywistycznych).

Jeżeli na ciało działa siła $\vec{F}$, to porusza się ono ruchem przyspieszonym, z przyspieszeniem proporcjonalnym do siły $\vec{F}$ i odwrotnie proporcjonalnym do masy ciała.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = m\vec{a}.$$

(obowiązuje tylko dla prędkości nierelatywistycznych).

Przyspieszenie

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}\,t}$$

Jeżeli na ciało działa siła $\vec{F}$, to porusza się ono ruchem przyspieszonym, z przyspieszeniem proporcjonalnym do siły $\vec{F}$ i odwrotnie proporcjonalnym do masy ciała.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = m\vec{a}.$$

(obowiązuje tylko dla prędkości nierelatywistycznych).

Przyspieszenie

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}\,t} = \dot{\vec{v}}$$

Jeżeli na ciało działa siła $\vec{F}$, to porusza się ono ruchem przyspieszonym, z przyspieszeniem proporcjonalnym do siły $\vec{F}$ i odwrotnie proporcjonalnym do masy ciała.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = m\vec{a}.$$

(obowiązuje tylko dla prędkości nierelatywistycznych).
Przyspieszenie

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}\,t} = \dot{\vec{v}} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}\,t^2}$$

Jeżeli na ciało działa siła $\vec{F}$, to porusza się ono ruchem przyspieszonym, z przyspieszeniem proporcjonalnym do siły $\vec{F}$ i odwrotnie proporcjonalnym do masy ciała.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = m\vec{a}.$$

(obowiązuje tylko dla prędkości nierelatywistycznych).

Przyspieszenie

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}\,t} = \dot{\vec{v}} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}\,t^2} = \ddot{\vec{r}}.$$

Jeżeli na ciało działa siła $\vec{F}$, to porusza się ono ruchem przyspieszonym, z przyspieszeniem proporcjonalnym do siły $\vec{F}$ i odwrotnie proporcjonalnym do masy ciała.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = m\vec{a}.$$

(obowiązuje tylko dla prędkości nierelatywistycznych).
Przyspieszenie

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}\,t} = \dot{\vec{v}} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}\,t^2} = \ddot{\vec{r}}.$$

Zauważmy, że chociaż $\vec{F} = \vec{0}$

II zasada dynamiki, przyspieszenie

Jeżeli na ciało działa siła $\vec{F}$, to porusza się ono ruchem przyspieszonym, z przyspieszeniem proporcjonalnym do siły $\vec{F}$ i odwrotnie proporcjonalnym do masy ciała.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = m\vec{a}.$$

(obowiązuje tylko dla prędkości nierelatywistycznych).
Przyspieszenie

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}\,t} = \dot{\vec{v}} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}\,t^2} = \ddot{\vec{r}}.$$

Zauważmy, że chociaż $\vec{F} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \vec{0}$

Jeżeli na ciało działa siła $\vec{F}$, to porusza się ono ruchem przyspieszonym, z przyspieszeniem proporcjonalnym do siły $\vec{F}$ i odwrotnie proporcjonalnym do masy ciała.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = m\vec{a}.$$

(obowiązuje tylko dla prędkości nierelatywistycznych).
Przyspieszenie

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}\,t} = \dot{\vec{v}} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}\,t^2} = \ddot{\vec{r}}.$$

Zauważmy, że chociaż $\vec{F} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \mathrm{const},$

II zasada dynamiki, przyspieszenie

Jeżeli na ciało działa siła $\vec{F}$, to porusza się ono ruchem przyspieszonym, z przyspieszeniem proporcjonalnym do siły $\vec{F}$ i odwrotnie proporcjonalnym do masy ciała.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = m\vec{a}.$$

(obowiązuje tylko dla prędkości nierelatywistycznych).

Przyspieszenie

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}\,t} = \dot{\vec{v}} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}\,t^2} = \ddot{\vec{r}}.$$

Zauważmy, że chociaż $\vec{F} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \mathrm{const}$,

to I zasada dynamiki jest czymś więcej niż prostą konsekwencją II.

Jeżeli na ciało działa siła $\vec{F}$, to porusza się ono ruchem przyspieszonym, z przyspieszeniem proporcjonalnym do siły $\vec{F}$ i odwrotnie proporcjonalnym do masy ciała.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = m\vec{a}.$$

(obowiązuje tylko dla prędkości nierelatywistycznych).

Przyspieszenie

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}\,t} = \dot{\vec{v}} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}\,t^2} = \ddot{\vec{r}}.$$

Zauważmy, że chociaż $\vec{F} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \mathrm{const}$,
to I zasada dynamiki jest czymś więcej niż prostą konsekwencją II.

II zasada dynamiki

Pęd ciała

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{p}} = m\dot{\vec{v}}$$

II zasada dynamiki

Pęd ciała

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{p}} = m\dot{\vec{v}} = m\vec{a}$$

II zasada dynamiki

Pęd ciała

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{p}} = m\dot{\vec{v}} = m\vec{a} = \vec{F}$$

II zasada dynamiki

Pęd ciała

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{p}} = m\dot{\vec{v}} = m\vec{a} = \vec{F} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{p}} = \vec{F}.$$

II zasada dynamiki

Pęd ciała

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{p}} = m\dot{\vec{v}} = m\vec{a} = \vec{F} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{p}} = \vec{F}.$$

Ostatnie równanie wyraża nieco ogólniejszą postać II zasady dynamiki:

II zasada dynamiki

Pęd ciała

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{p}} = m\dot{\vec{v}} = m\vec{a} = \vec{F} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{p}} = \vec{F}.$$

Ostatnie równanie wyraża nieco ogólniejszą postać II zasady dynamiki:

Zmiana pędu ciała w czasie jest równa działającej na nie sile.

II zasada dynamiki

Pęd ciała

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{p}} = m\dot{\vec{v}} = m\vec{a} = \vec{F} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{p}} = \vec{F}.$$

Ostatnie równanie wyraża nieco ogólniejszą postać II zasady dynamiki:
Zmiana pędu ciała w czasie jest równa działającej na nie sile.

Wynikające z II zasady dynamiki równanie ruchu ciała

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{\vec{F}}{m}$$

jest równaniem różniczkowym drugiego rzędu, tzn. zawiera drugą pochodną.

Jego rozwiązaniem jest funkcja wektorowa $\vec{r}(t)$ określająca jednoznacznie położenie ciała w wybranym układzie współrzędnych w każdej chwili czasu, pod warunkiem że znamy położenie i prędkość ciała w chwili początkowej, $t = 0$.

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(0), \qquad \vec{v}_0 = \vec{v}(0) = \dot{\vec{r}}(0).$$

Wynikające z II zasady dynamiki równanie ruchu ciała

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{\vec{F}}{m}$$

jest równaniem różniczkowym drugiego rzędu, tzn. zawiera drugą pochodną.
Jego rozwiązaniem jest funkcja wektorowa $\vec{r}(t)$ określająca jednoznacznie położenie ciała w wybranym układzie współrzędnych w każdej chwili czasu, pod warunkiem że znamy położenie i prędkość ciała w chwili początkowej, $t = 0$.

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(0), \qquad \vec{v}_0 = \vec{v}(0) = \dot{\vec{r}}(0).$$

Przykład

Ruch pod wpływem stałej siły $\vec{F}_0$.

Wybierzmy oś Ox układu kartezjańskiego w kierunku siły $\vec{F}_0$.

Przykład

Ruch pod wpływem stałej siły $\vec{F}_0$.

Wybierzmy oś Ox układu kartezjańskiego w kierunku siły $\vec{F}_0$.

Wówczas $\vec{F}_0 = [F_0, 0, 0]$, $\vec{r} = [x, 0, 0]$,

Ruch pod wpływem stałej siły $\vec{F}_0$.
Wybierzmy oś Ox układu kartezjańskiego w kierunku siły $\vec{F}_0$.
Wówczas $\vec{F}_0 = [F_0, 0, 0]$, $\vec{r} = [x, 0, 0]$, a równanie ruchu ma postać

$$\ddot{x}(t) = \frac{F_0}{m} = a_0,$$

Przykład

Ruch pod wpływem stałej siły $\vec{F}_0$.
Wybierzmy oś Ox układu kartezjańskiego w kierunku siły $\vec{F}_0$.
Wówczas $\vec{F}_0 = [F_0, 0, 0]$, $\vec{r} = [x, 0, 0]$, a równanie ruchu ma postać

$$\ddot{x}(t) = \frac{F_0}{m} = a_0,$$

przy warunkach początkowych $x(0) = 0$ i $v(0) = v_0$.

Przykład

Ruch pod wpływem stałej siły $\vec{F}_0$.
Wybierzmy oś Ox układu kartezjańskiego w kierunku siły $\vec{F}_0$.
Wówczas $\vec{F}_0 = [F_0, 0, 0]$, $\vec{r} = [x, 0, 0]$, a równanie ruchu ma postać

$$\ddot{x}(t) = \frac{F_0}{m} = a_0,$$

przy warunkach początkowych $x(0) = 0$ i $v(0) = v_0$.
Całkując obustronnie

$$\int \ddot{x}(t)\mathrm{d}t = \int a_0 \mathrm{d}t =$$

Przykład

Ruch pod wpływem stałej siły $\vec{F}_0$.
Wybierzmy oś Ox układu kartezjańskiego w kierunku siły $\vec{F}_0$.
Wówczas $\vec{F}_0 = [F_0, 0, 0]$, $\vec{r} = [x, 0, 0]$, a równanie ruchu ma postać

$$\ddot{x}(t) = \frac{F_0}{m} = a_0,$$

przy warunkach początkowych $x(0) = 0$ i $v(0) = v_0$.
Całkując obustronnie

$$\int \ddot{x}(t)\mathrm{d}t = \int a_0 \mathrm{d}t = a_0 \int \mathrm{d}t$$

Przykład

Ruch pod wpływem stałej siły $\vec{F}_0$.
Wybierzmy oś Ox układu kartezjańskiego w kierunku siły $\vec{F}_0$.
Wówczas $\vec{F}_0 = [F_0, 0, 0]$, $\vec{r} = [x, 0, 0]$, a równanie ruchu ma postać

$$\ddot{x}(t) = \frac{F_0}{m} = a_0,$$

przy warunkach początkowych $x(0) = 0$ i $v(0) = v_0$.
Całkując obustronnie

$$\int \ddot{x}(t)\mathrm{d}t = \int a_0 \mathrm{d}t = a_0 \int \mathrm{d}t$$

otrzymujemy

$$\dot{x}(t) = a_0 t + C_1.$$

Przykład

Ruch pod wpływem stałej siły $\vec{F}_0$.
Wybierzmy oś Ox układu kartezjańskiego w kierunku siły $\vec{F}_0$.
Wówczas $\vec{F}_0 = [F_0, 0, 0]$, $\vec{r} = [x, 0, 0]$, a równanie ruchu ma postać

$$\ddot{x}(t) = \frac{F_0}{m} = a_0,$$

przy warunkach początkowych $x(0) = 0$ i $v(0) = v_0$.
Całkując obustronnie

$$\int \ddot{x}(t)\mathrm{d}t = \int a_0 \mathrm{d}t = a_0 \int \mathrm{d}t$$

otrzymujemy

$$\dot{x}(t) = a_0 t + C_1.$$

Przykład

Całkując po raz drugi

$$\int \dot{x}(t)\mathrm{d}t = \int (a_0 t + C_1)\,\mathrm{d}t = a_0 \int t\mathrm{d}t + C_1 \int \mathrm{d}t$$

Przykład

Całkując po raz drugi

$$\int \dot{x}(t)\mathrm{d}t = \int (a_0 t + C_1)\,\mathrm{d}t = a_0 \int t\mathrm{d}t + C_1 \int \mathrm{d}t$$

otrzymujemy

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 t^2 + C_1 t + C_2.$$

Przykład

Całkując po raz drugi

$$\int \dot{x}(t)\mathrm{d}t = \int (a_0 t + C_1)\,\mathrm{d}t = a_0 \int t\mathrm{d}t + C_1 \int \mathrm{d}t$$

otrzymujemy

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 t^2 + C_1 t + C_2.$$

Stałe dowolne C_1 i C_2 wyznaczamy z warunków początkowych:

Przykład

Całkując po raz drugi

$$\int \dot{x}(t)\mathrm{d}t = \int (a_0 t + C_1)\,\mathrm{d}t = a_0 \int t\mathrm{d}t + C_1 \int \mathrm{d}t$$

otrzymujemy

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + C_1 t + C_2.$$

Stałe dowolne C_1 i C_2 wyznaczamy z warunków początkowych:

$x(0) = 0$

Przykład

Całkując po raz drugi

$$\int \dot{x}(t)\mathrm{d}t = \int (a_0 t + C_1)\,\mathrm{d}t = a_0 \int t\mathrm{d}t + C_1 \int \mathrm{d}t$$

otrzymujemy

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 t^2 + C_1 t + C_2.$$

Stałe dowolne C_1 i C_2 wyznaczamy z warunków początkowych:

$x(0) = 0 \quad \Rightarrow$

Przykład

Całkując po raz drugi

$$\int \dot{x}(t)\mathrm{d}t = \int (a_0 t + C_1)\,\mathrm{d}t = a_0 \int t\mathrm{d}t + C_1 \int \mathrm{d}t$$

otrzymujemy

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 t^2 + C_1 t + C_2.$$

Stałe dowolne C_1 i C_2 wyznaczamy z warunków początkowych:

$$x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x(0) = \frac{1}{2}a_0 \cdot 0^2 + C_1 \cdot 0 + C_2$$

Przykład

Całkując po raz drugi

$$\int \dot{x}(t)\mathrm{d}t = \int (a_0 t + C_1)\,\mathrm{d}t = a_0 \int t\mathrm{d}t + C_1 \int \mathrm{d}t$$

otrzymujemy

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 t^2 + C_1 t + C_2.$$

Stałe dowolne C_1 i C_2 wyznaczamy z warunków początkowych:

$$x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x(0) = \frac{1}{2}a_0 \cdot 0^2 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0$$

Przykład

Całkując po raz drugi

$$\int \dot{x}(t)\mathrm{d}t = \int (a_0 t + C_1)\,\mathrm{d}t = a_0 \int t\mathrm{d}t + C_1 \int \mathrm{d}t$$

otrzymujemy

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 t^2 + C_1 t + C_2.$$

Stałe dowolne C_1 i C_2 wyznaczamy z warunków początkowych:

$$x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x(0) = \frac{1}{2}a_0 \cdot 0^2 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0 \;\Rightarrow\; C_2 = 0,$$

Przykład

Całkując po raz drugi

$$\int \dot{x}(t)\mathrm{d}t = \int (a_0 t + C_1)\, \mathrm{d}t = a_0 \int t\mathrm{d}t + C_1 \int \mathrm{d}t$$

otrzymujemy

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 t^2 + C_1 t + C_2.$$

Stałe dowolne C_1 i C_2 wyznaczamy z warunków początkowych:

$$x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x(0) = \frac{1}{2}a_0 \cdot 0^2 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0 \;\Rightarrow\; C_2 = 0,$$

$$\dot{x}(0) = v_0$$

Przykład

Całkując po raz drugi

$$\int \dot{x}(t)\mathrm{d}t = \int (a_0 t + C_1)\,\mathrm{d}t = a_0 \int t\mathrm{d}t + C_1 \int \mathrm{d}t$$

otrzymujemy

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + C_1 t + C_2.$$

Stałe dowolne C_1 i C_2 wyznaczamy z warunków początkowych:

$$x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x(0) = \frac{1}{2} a_0 \cdot 0^2 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0,$$

$$\dot{x}(0) = v_0 \quad \Rightarrow$$

Przykład

Całkując po raz drugi

$$\int \dot{x}(t)\mathrm{d}t = \int (a_0 t + C_1)\,\mathrm{d}t = a_0 \int t\mathrm{d}t + C_1 \int \mathrm{d}t$$

otrzymujemy

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + C_1 t + C_2.$$

Stałe dowolne C_1 i C_2 wyznaczamy z warunków początkowych:

$$x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x(0) = \frac{1}{2} a_0 \cdot 0^2 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0,$$

$$\dot{x}(0) = v_0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(0) = a_0 \cdot 0 + C_1$$

Przykład

Całkując po raz drugi

$$\int \dot{x}(t)\mathrm{d}t = \int (a_0 t + C_1)\,\mathrm{d}t = a_0 \int t\mathrm{d}t + C_1 \int \mathrm{d}t$$

otrzymujemy

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 t^2 + C_1 t + C_2.$$

Stałe dowolne C_1 i C_2 wyznaczamy z warunków początkowych:

$$x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x(0) = \frac{1}{2}a_0 \cdot 0^2 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0,$$

$$\dot{x}(0) = v_0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(0) = a_0 \cdot 0 + C_1 = v_0$$

Przykład

Całkując po raz drugi

$$\int \dot{x}(t)\mathrm{d}t = \int (a_0 t + C_1)\,\mathrm{d}t = a_0 \int t\mathrm{d}t + C_1 \int \mathrm{d}t$$

otrzymujemy

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + C_1 t + C_2.$$

Stałe dowolne C_1 i C_2 wyznaczamy z warunków początkowych:

$$x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x(0) = \frac{1}{2} a_0 \cdot 0^2 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0,$$

$$\dot{x}(0) = v_0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(0) = a_0 \cdot 0 + C_1 = v_0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = v_0.$$

Przykład

Całkując po raz drugi

$$\int \dot{x}(t)\mathrm{d}t = \int (a_0 t + C_1)\,\mathrm{d}t = a_0 \int t\mathrm{d}t + C_1 \int \mathrm{d}t$$

otrzymujemy

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + C_1 t + C_2.$$

Stałe dowolne C_1 i C_2 wyznaczamy z warunków początkowych:

$$x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x(0) = \frac{1}{2} a_0 \cdot 0^2 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0 \;\Rightarrow\; C_2 = 0,$$

$$\dot{x}(0) = v_0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(0) = a_0 \cdot 0 + C_1 = v_0 \;\Rightarrow\; C_1 = v_0.$$

Przykład

Rozwiązanie problemu ma postać

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 \, t^2 + v_0 \, t.$$

Jest to wzór na drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym.

Przykład

Rozwiązanie problemu ma postać

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0\, t^2 + v_0\, t.$$

Jest to wzór na drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym.

III zasada dynamiki Newtona

Dotyczy układu ciał. Źródłem siły działającej na pewne ciało musi być jakieś inne ciało.
Jeśli ciało 1 działa na ciało 2 siłą $\vec{F}_{21}$, to ciało 2 działa na ciało 1 przeciwnie skierowaną siłą reakcji $\vec{F}_{12}$

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

III zasada dynamiki Newtona

Dotyczy układu ciał. Źródłem siły działającej na pewne ciało musi być jakieś inne ciało.
Jeśli ciało 1 działa na ciało 2 siłą $\vec{F}_{21}$, to ciało 2 działa na ciało 1 przeciwnie skierowaną siłą reakcji $\vec{F}_{12}$

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

Zasada ta traci słuszność gdy efekty relatywistyczne odgrywają istotną rolę. W powyższej równości musimy bowiem porównywać siły $\vec{F}_{12}(t)$ i $\vec{F}_{21}(t)$ w tej samej chwili czasu, a pojęcie jednoczesności w teorii względności zależy od wyboru układu odniesienia.

III zasada dynamiki Newtona

Dotyczy układu ciał. Źródłem siły działającej na pewne ciało musi być jakieś inne ciało.

Jeśli ciało 1 działa na ciało 2 siłą $\vec{F}_{21}$, to ciało 2 działa na ciało 1 przeciwnie skierowaną siłą reakcji $\vec{F}_{12}$

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

Zasada ta traci słuszność gdy efekty relatywistyczne odgrywają istotną rolę. W powyższej równości musimy bowiem porównywać siły $\vec{F}_{12}(t)$ i $\vec{F}_{21}(t)$ w tej samej chwili czasu, a pojęcie jednoczesności w teorii względności zależy od wyboru układu odniesienia.