Mechanika relatywistyczna

Wykład 13

Karol Kołodziej

Instytut Fizyki
Uniwersytet Śląski, Katowice
http://kk.us.edu.pl

Czterowektory kontrawariantne i kowariantne

Wszystkie obiekty, które przy transformacji Lorentza transformują się tak jak

- kontrawariantny czterowektor położenia $x^\mu = (ct, \vec{x})$, tzn.

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu,$$

  nazywamy czterowektorami kontrawariantnymi.

- kowariantny czterowektor położenia $x_\mu = (ct, -\vec{x})$, tzn.

$$x'_\mu = x_\nu \Lambda^{-1}{}^\nu{}_\mu = x_\nu \Lambda^T{}^\nu{}_\mu,$$

  nazywamy czterowektorami kowariantnymi.

Czteroprędkość

Wzory transformacyjne dla wektora prędkości były skomplikowane, gdyż w jego definicji

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}$$

występują zarówno składowe przestrzenne, jak i składowa czasowa czterowektora położenia $x^\mu = (ct, \vec{x})$.

Czteroprędkość

Wzory transformacyjne dla wektora prędkości były skomplikowane, gdyż w jego definicji

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}$$

występują zarówno składowe przestrzenne, jak i składowa czasowa czterowektora położenia $x^\mu = (ct, \vec{x})$.
Zdefiniujmy czterowekor prędkości

$$u^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t_0},$$

gdzie t_0 jest czasem własnym, mierzonym w układzie spoczynkowym cząstki.

Czteroprędkość

Wzory transformacyjne dla wektora prędkości były skomplikowane, gdyż w jego definicji

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}$$

występują zarówno składowe przestrzenne, jak i składowa czasowa czterowektora położenia $x^\mu = (ct, \vec{x})$.
Zdefiniujmy czterowekor prędkości

$$u^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t_0},$$

gdzie t_0 jest czasem własnym, mierzonym w układzie spoczynkowym cząstki.

Czteroprędkość

Czas w układzie, w którym cząstka porusza się z prędkością $\vec{v}$, wiąże się z czasem własnym wzorem

$$dt = \gamma\, dt_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt_0} = \frac{dt}{dt_0}\frac{d}{dt} = \gamma\,\frac{d}{dt}$$

i kontrawariantny czterowektor prędkości przybiera postać

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{dt_0} = \gamma\,\frac{d}{dt}\,(ct, \vec{x}) = \gamma\left(\frac{d(ct)}{dt}, \frac{d\vec{x}}{dt}\right) = \gamma\,(c, \vec{v})\,.$$

Czas w układzie, w którym cząstka porusza się z prędkością $\vec{v}$, wiąże się z czasem własnym wzorem

$$\mathrm{d}t = \gamma\,\mathrm{d}t_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_0} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t_0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \gamma\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$$

i kontrawariantny czterowektor prędkości przybiera postać

$$u^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t_0} = \gamma\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(ct, \vec{x}) = \gamma\left(\frac{\mathrm{d}(ct)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}\right) = \gamma\,(c, \vec{v})\,.$$

Zdefiniujmy kontrawariantny czterowektor pędu

$$p^\mu = mu^\mu = m\gamma\,(c, \vec{v})\,.$$

Czas w układzie, w którym cząstka porusza się z prędkością $\vec{v}$, wiąże się z czasem własnym wzorem

$$\mathrm{d}t = \gamma\, \mathrm{d}t_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_0} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t_0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \gamma\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$$

i kontrawariantny czterowektor prędkości przybiera postać

$$u^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t_0} = \gamma\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(ct, \vec{x}\right) = \gamma \left(\frac{\mathrm{d}(ct)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}\right) = \gamma\left(c, \vec{v}\right).$$

Zdefiniujmy kontrawariantny czterowektor pędu

$$p^\mu = mu^\mu = m\gamma\left(c, \vec{v}\right).$$

Ponieważ czynnik Lorentza γ jest bezwymiarowy, to widzimy, że relatywistyczny pęd ciała o masie m należałoby zdefiniować jako

$$\boxed{\vec{p} = \gamma\, m\vec{v},}$$

a relatywistyczną energię jako

$$\boxed{E = \gamma\, mc^2.}$$

Czterowektor energii–pędu

Ponieważ czynnik Lorentza γ jest bezwymiarowy, to widzimy, że relatywistyczny pęd ciała o masie m należałoby zdefiniować jako

$$\boxed{\vec{p} = \gamma\, m\vec{v},}$$

a relatywistyczną energię jako

$$\boxed{E = \gamma\, mc^2.}$$

Zatem czterowektor energii–pędu możemy zapisać w formie

$$p^\mu = (m\gamma c, m\gamma\vec{v}) = (E/c, \vec{p})\,.$$

Czterowektor energii–pędu

Ponieważ czynnik Lorentza γ jest bezwymiarowy, to widzimy, że relatywistyczny pęd ciała o masie m należałoby zdefiniować jako

$$\boxed{\vec{p} = \gamma\, m\vec{v},}$$

a relatywistyczną energię jako

$$\boxed{E = \gamma\, mc^2.}$$

Zatem czterowektor energii–pędu możemy zapisać w formie

$$p^\mu = (m\gamma c, m\gamma\vec{v}) = (E/c, \vec{p})\,.$$

Zauważmy, że energia ciała o masie m,

$$E = \gamma\, mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}}$$

w układzie spoczynkowym, gdzie $\vec{v} = \vec{0}$, jest niezerowa i wynosi

$$E_0 = mc^2.$$

Tak właśnie powinien wyglądać słynny wzór Einsteina, w którym często zapomina się albo czynnika γ, albo indeksu 0.

Zauważmy, że energia ciała o masie m,

$$E = \gamma\, mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}}$$

w układzie spoczynkowym, gdzie $\vec{v} = \vec{0}$, jest niezerowa i wynosi

$$E_0 = mc^2.$$

Tak właśnie powinien wyglądać słynny wzór Einsteina, w którym często zapomina się albo czynnika γ, albo indeksu 0.

Znajdźmy przybliżenie nierelatywistyczne wzoru na energię ciała

$$E = \gamma\, mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}}.$$

Jeżeli $|\vec{v}| \ll c \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\vec{v}^2}{c^2} \ll 1$ i możemy zastosować przybliżenia

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx \frac{1}{1 - \frac{1}{2}x} \approx 1 + \frac{1}{2}x,$$

Relatywistyczna energia i pęd

Znajdźmy przybliżenie nierelatywistyczne wzoru na energię ciała

$$E = \gamma\, mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}}.$$

Jeżeli $|\vec{v}| \ll c \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\vec{v}^2}{c^2} \ll 1$ i możemy zastosować przybliżenia

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx \frac{1}{1 - \frac{1}{2}x} \approx 1 + \frac{1}{2}x,$$

które wynikają z następujących przybliżonych równości

$$\left(1 - \frac{1}{2}x\right)^2 = 1 - x + \frac{1}{4}x^2 \approx 1 - x \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x,$$

$$\left(1 + \frac{1}{2}x\right)\left(1 - \frac{1}{2}x\right) = 1 - \frac{1}{4}x^2 \approx 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1 - \frac{1}{2}x} \approx 1 + \frac{1}{2}x.$$

Znajdźmy przybliżenie nierelatywistyczne wzoru na energię ciała

$$E = \gamma\, mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}}.$$

Jeżeli $|\vec{v}| \ll c \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\vec{v}^2}{c^2} \ll 1$ i możemy zastosować przybliżenia

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx \frac{1}{1 - \frac{1}{2}x} \approx 1 + \frac{1}{2}x,$$

które wynikają z następujących przybliżonych równości

$$\left(1 - \frac{1}{2}x\right)^2 = 1 - x + \frac{1}{4}x^2 \approx 1 - x \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x,$$

$$\left(1 + \frac{1}{2}x\right)\left(1 - \frac{1}{2}x\right) = 1 - \frac{1}{4}x^2 \approx 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1 - \frac{1}{2}x} \approx 1 + \frac{1}{2}x.$$

Relatywistyczna energia i pęd

Wtedy

$$E \approx mc^2 \left(1 + \frac{\vec{v}^2}{2c^2}\right) = mc^2 + \frac{1}{2} m\vec{v}^2 = E_0 + T.$$

Dla pędu w przybliżeniu nierelatywistycznym otrzymamy natomiast

$$\vec{p} = \gamma\, m\vec{v} \approx m\vec{v} \left(1 + \frac{\vec{v}^2}{2c^2}\right) \approx m\vec{v}.$$

Wtedy

$$E \approx mc^2 \left(1 + \frac{\vec{v}^2}{2c^2}\right) = mc^2 + \frac{1}{2} m\vec{v}^2 = E_0 + T.$$

Dla pędu w przybliżeniu nierelatywistycznym otrzymamy natomiast

$$\vec{p} = \gamma\, m\vec{v} \approx m\vec{v} \left(1 + \frac{\vec{v}^2}{2c^2}\right) \approx m\vec{v}.$$

Czterowektor energii–pędu

Obliczmy kwadrat normy czteropędu

$$\begin{aligned} \|p\|^2 &= p \cdot p = E^2/c^2 - \vec{p}^2 = \gamma^2 m^2 c^2 - \gamma^2 m^2 \vec{v}^2 \\ &= m^2 c^2 \gamma^2 \left(1 - \vec{v}^2/c^2\right) = m^2 c^2. \end{aligned}$$

Wzór ten często pisze się w formie

$$\boxed{E^2 - \vec{p}^2 c^2 = m^2 c^4.}$$

Jest to oczywiście niezmiennik relatywistyczny.

Czterowektor energii–pędu

Obliczmy kwadrat normy czteropędu

$$
\begin{aligned}
\|p\|^2 &= p \cdot p = E^2/c^2 - \vec{p}^2 = \gamma^2 m^2 c^2 - \gamma^2 m^2 \vec{v}^2 \\
&= m^2 c^2 \gamma^2 \left(1 - \vec{v}^2/c^2\right) = m^2 c^2 .
\end{aligned}
$$

Wzór ten często pisze się w formie

$$\boxed{E^2 - \vec{p}^2 c^2 = m^2 c^4 .}$$

Jest to oczywiście niezmiennik relatywistyczny.
Zatem, w dowolnym układzie odniesienia, energia wiąże się z pędem wzorem

$$E = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4},$$

gdzie odrzuciliśmy drugie, ujemne rozwiązanie.

Czterowektor energii–pędu

Obliczmy kwadrat normy czteropędu

$$\begin{aligned} \|p\|^2 &= p \cdot p = E^2/c^2 - \vec{p}^2 = \gamma^2 m^2 c^2 - \gamma^2 m^2 \vec{v}^2 \\ &= m^2 c^2 \gamma^2 \left(1 - \vec{v}^2/c^2\right) = m^2 c^2. \end{aligned}$$

Wzór ten często pisze się w formie

$$\boxed{E^2 - \vec{p}^2 c^2 = m^2 c^4.}$$

Jest to oczywiście niezmiennik relatywistyczny.
Zatem, w dowolnym układzie odniesienia, energia wiąże się z pędem wzorem

$$E = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4},$$

gdzie odrzuciliśmy drugie, ujemne rozwiązanie.

Podobnie jak zrobiliśmy to w przypadku nierelatywistycznym, można pokazać, że symetria układu fizycznego, a więc niezmienniczość funkcji Lagrange'a, względem translacji

$$x^\mu \quad \rightarrow \quad x'^\mu = x^\mu + a^\mu, \qquad a^\mu = \mathrm{const.}$$

prowadzi do zasady zachowania czteropędu układu.

Ponieważ w czasoprzestrzeni Minkowskiego czas traktujemy na podobnych zasadach jak współrzędne przestrzenne, to dowodu zasady zachowania energii nie trzeba przeprowadzać osobno.

Zasada zachowania energii–pędu

Podobnie jak zrobiliśmy to w przypadku nierelatywistycznym, można pokazać, że symetria układu fizycznego, a więc niezmienniczość funkcji Lagrange'a, względem translacji

$$x^{\mu} \quad \to \quad x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu}, \qquad a^{\mu} = \mathrm{const.}$$

prowadzi do zasady zachowania czteropędu układu.

Ponieważ w czasoprzestrzeni Minkowskiego czas traktujemy na podobnych zasadach jak współrzędne przestrzenne, to dowodu zasady zachowania energii nie trzeba przeprowadzać osobno.

Wynika ona z zasady zachowania czteropędu

$$\sum_i p_i^{\mu} = \sum_i (E_i/c, \vec{p}_i) = \mathrm{const} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_i E_i = \mathrm{const} \quad \mathrm{i} \quad \sum_i \vec{p}_i = \mathrm{const.}$$

Zasada zachowania energii–pędu

Podobnie jak zrobiliśmy to w przypadku nierelatywistycznym, można pokazać, że symetria układu fizycznego, a więc niezmienniczość funkcji Lagrange'a, względem translacji

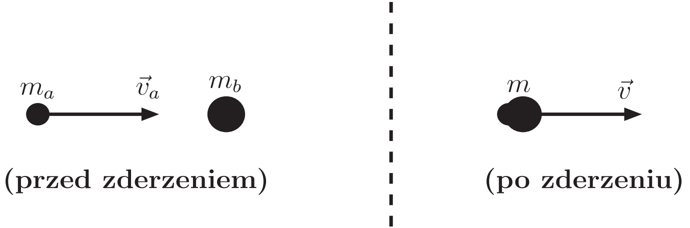
$$x^\mu \quad \rightarrow \quad x'^\mu = x^\mu + a^\mu, \qquad a^\mu = \mathrm{const.}$$

prowadzi do zasady zachowania czteropędu układu.
Ponieważ w czasoprzestrzeni Minkowskiego czas traktujemy na podobnych zasadach jak współrzędne przestrzenne, to dowodu zasady zachowania energii nie trzeba przeprowadzać osobno.
Wynika ona z zasady zachowania czteropędu

$$\sum_i p_i^\mu = \sum_i (E_i/c, \vec{p}_i) = \mathrm{const} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_i E_i = \mathrm{const} \quad \mathrm{i} \quad \sum_i \vec{p}_i = \mathrm{const.}$$

Przykład 1. Relatywistyczna kulka z plasteliny o masie m_a i prędkości $\vec{v}_a$ zderza się ze spoczywającą kulką o masie m_b. Obie kulki sklejają się tworząc jedną kulkę. Jaka jest masa m i prędkość $\vec{v}$ kulki utworzonej w wyniku zderzenia?

Przykład 1. Relatywistyczna kulka z plasteliny o masie m_a i prędkości $\vec{v}_a$ zderza się ze spoczywającą kulką o masie m_b. Obie kulki sklejają się tworząc jedną kulkę. Jaka jest masa m i prędkość $\vec{v}$ kulki utworzonej w wyniku zderzenia?



Zasada zachowania czteropędu daje

$$p_a + p_b = p,$$

gdzie p_a, p_b – czteropędy przed, a p – czteropęd po zderzeniu.

Przykład 1. Relatywistyczna kulka z plasteliny o masie m_a i prędkości $\vec{v}_a$ zderza się ze spoczywającą kulką o masie m_b. Obie kulki sklejają się tworząc jedną kulkę. Jaka jest masa m i prędkość $\vec{v}$ kulki utworzonej w wyniku zderzenia?

Zasada zachowania czteropędu daje

$$p_a + p_b = p,$$

gdzie p_a, p_b – czteropędy przed, a p – czteropęd po zderzeniu.

Zasada zachowania energii–pędu

$$p_a = \left(\frac{E_a}{c}, \vec{p}_a\right) = \gamma_a m_a \left(c, \vec{v}_a\right), \qquad p_b = \left(m_b c, \vec{0}\right).$$

$$(p_a + p_b)^2 = p^2 = m^2 c^2 \quad \Rightarrow \quad m^2 = \frac{1}{c^2}\left(p_a + p_b\right)^2$$

$$m^2 = \frac{1}{c^2}\left(p_a^2 + p_b^2 + 2p_a \cdot p_b\right) = \frac{1}{c^2}\left(m_a^2 c^2 + m_b^2 c^2 + 2p_a \cdot p_b\right)$$

$$p_a = \left(\frac{E_a}{c}, \vec{p}_a\right) = \gamma_a m_a \left(c, \vec{v}_a\right), \qquad p_b = \left(m_b c, \vec{0}\right).$$

$$(p_a + p_b)^2 = p^2 = m^2 c^2 \quad \Rightarrow \quad m^2 = \frac{1}{c^2}\left(p_a + p_b\right)^2$$

$$m^2 = \frac{1}{c^2}\left(p_a^2 + p_b^2 + 2p_a \cdot p_b\right) = \frac{1}{c^2}\left(m_a^2 c^2 + m_b^2 c^2 + 2p_a \cdot p_b\right)$$

$$p_a \cdot p_b = \frac{E_a}{c} m_b c - \vec{p}_a \cdot \vec{0} = E_a m_b \quad \Rightarrow \quad m^2 = m_a^2 + m_b^2 + 2\frac{E_a m_b}{c^2}$$

Zasada zachowania energii–pędu

$$p_a = \left(\frac{E_a}{c}, \vec{p}_a\right) = \gamma_a m_a \left(c, \vec{v}_a\right), \qquad p_b = \left(m_b c, \vec{0}\right).$$

$$(p_a + p_b)^2 = p^2 = m^2 c^2 \quad \Rightarrow \quad m^2 = \frac{1}{c^2}\left(p_a + p_b\right)^2$$

$$m^2 = \frac{1}{c^2}\left(p_a^2 + p_b^2 + 2p_a \cdot p_b\right) = \frac{1}{c^2}\left(m_a^2 c^2 + m_b^2 c^2 + 2p_a \cdot p_b\right)$$

$$p_a \cdot p_b = \frac{E_a}{c} m_b c - \vec{p}_a \cdot \vec{0} = E_a m_b \quad \Rightarrow \quad m^2 = m_a^2 + m_b^2 + 2\frac{E_a m_b}{c^2}$$

$$m = \sqrt{m_a^2 + m_b^2 + 2\gamma_a m_a m_b}, \qquad \text{gdzie} \quad \gamma_a = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{v}_a^2/c^2}}.$$

$$p_a = \left(\frac{E_a}{c}, \vec{p}_a\right) = \gamma_a m_a \left(c, \vec{v}_a\right), \qquad p_b = \left(m_b c, \vec{0}\right).$$

$$(p_a + p_b)^2 = p^2 = m^2 c^2 \quad \Rightarrow \quad m^2 = \frac{1}{c^2}\left(p_a + p_b\right)^2$$

$$m^2 = \frac{1}{c^2}\left(p_a^2 + p_b^2 + 2p_a \cdot p_b\right) = \frac{1}{c^2}\left(m_a^2 c^2 + m_b^2 c^2 + 2p_a \cdot p_b\right)$$

$$p_a \cdot p_b = \frac{E_a}{c} m_b c - \vec{p}_a \cdot \vec{0} = E_a m_b \quad \Rightarrow \quad m^2 = m_a^2 + m_b^2 + 2\frac{E_a m_b}{c^2}$$

$$m = \sqrt{m_a^2 + m_b^2 + 2\gamma_a m_a m_b}, \qquad \text{gdzie} \quad \gamma_a = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{v}_a^2/c^2}}.$$

Zasada zachowania energii–pędu

Znajdźmy końcową prędkość. Ze wzorów na energię i pęd

$$E = \gamma mc^2, \quad \vec{p} = \gamma m\vec{v} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \frac{\vec{p}c^2}{E}.$$

Zasada zachowania energii–pędu

Znajdźmy końcową prędkość. Ze wzorów na energię i pęd

$$E = \gamma m c^2, \quad \vec{p} = \gamma m \vec{v} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \frac{\vec{p} c^2}{E}.$$

Z zasady zachowania czteropędu

$$E = E_a + m_b c^2, \qquad \vec{p} = \vec{p}_a = \gamma_a m_a \vec{v}_a \quad \Rightarrow$$

$$\vec{v} = \frac{\gamma_a m_a \vec{v}_a c^2}{E_a + m_b c^2} = \frac{\gamma_a m_a \vec{v}_a c^2}{\gamma_a m_a c^2 + m_b c^2} = \frac{\gamma_a m_a}{\gamma_a m_a + m_b} \vec{v}_a.$$

Zasada zachowania energii–pędu

Znajdźmy końcową prędkość. Ze wzorów na energię i pęd

$$E = \gamma m c^2, \quad \vec{p} = \gamma m \vec{v} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \frac{\vec{p} c^2}{E}.$$

Z zasady zachowania czteropędu

$$E = E_a + m_b c^2, \qquad \vec{p} = \vec{p}_a = \gamma_a m_a \vec{v}_a \quad \Rightarrow$$

$$\vec{v} = \frac{\gamma_a m_a \vec{v}_a c^2}{E_a + m_b c^2} = \frac{\gamma_a m_a \vec{v}_a c^2}{\gamma_a m_a c^2 + m_b c^2} = \frac{\gamma_a m_a}{\gamma_a m_a + m_b} \vec{v}_a.$$

W granicy nierelatywistycznej

$$|\vec{v}_a| \ll c \Rightarrow \gamma_a = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{v}_a^2/c^2}} \approx 1,$$

więc

$$\vec{v} = \frac{\gamma_a m_a}{\gamma_a m_a + m_b} \vec{v}_a \approx \frac{m_a}{m_a + m_b} \vec{v}_a,$$

$$m = \sqrt{m_a^2 + m_b^2 + 2\gamma_a m_a m_b} \approx m_a + m_b.$$

Zasada zachowania energii–pędu

W granicy nierelatywistycznej

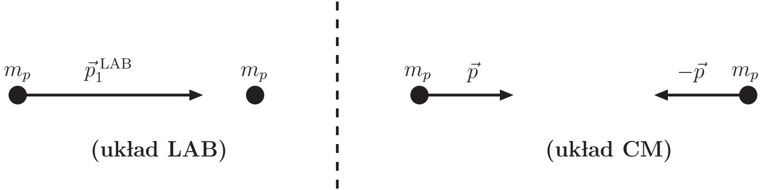
$$|\vec{v}_a| \quad \ll \quad c \quad \Rightarrow \quad \gamma_a = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{v}_a^{\,2}/c^2}} \approx 1,$$

więc

$$\begin{aligned} \vec{v} \quad &= \quad \frac{\gamma_a m_a}{\gamma_a m_a + m_b}\,\vec{v}_a \quad \approx \quad \frac{m_a}{m_a + m_b}\,\vec{v}_a, \\ m \quad &= \quad \sqrt{m_a^2 + m_b^2 + 2\gamma_a m_a m_b} \quad \approx \quad m_a + m_b. \end{aligned}$$

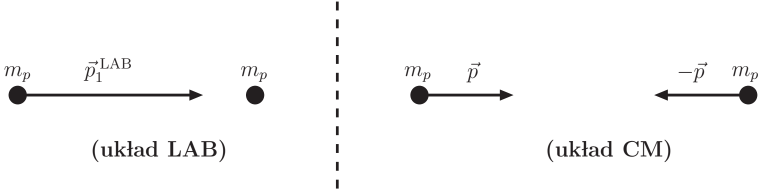
Układ środka masy

Wiązka protonów zderza się z protonami tarczy. Jaki jest związek pomiędzy energią całkowitą dwóch zderzających się protonów w układzie laboratoryjnym (LAB), w którym tarcza spoczywa, z ich energią całkowitą w układzie środka masy (CM), w którym spoczywa środek masy zderzanych protonów, a więc $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{0}$?



Układ środka masy

Wiązka protonów zderza się z protonami tarczy. Jaki jest związek pomiędzy energią całkowitą dwóch zderzających się protonów w układzie laboratoryjnym (LAB), w którym tarcza spoczywa, z ich energią całkowitą w układzie środka masy (CM), w którym spoczywa środek masy zderzanych protonów, a więc $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{0}$?

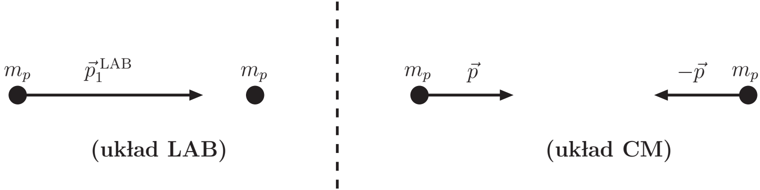


Porównajmy

$$\left(p_1^{\mathrm{LAB}} + p_2^{\mathrm{LAB}}\right)^2 = \left(p_1^{\mathrm{CM}} + p_2^{\mathrm{CM}}\right)^2 .$$

Kwadrat czterowektora jest niezmiennikiem.

Wiązka protonów zderza się z protonami tarczy. Jaki jest związek pomiędzy energią całkowitą dwóch zderzających się protonów w układzie laboratoryjnym (LAB), w którym tarcza spoczywa, z ich energią całkowitą w układzie środka masy (CM), w którym spoczywa środek masy zderzanych protonów, a więc $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{0}$?



Porównajmy

$$\left(p_1^{\mathrm{LAB}} + p_2^{\mathrm{LAB}}\right)^2 = \left(p_1^{\mathrm{CM}} + p_2^{\mathrm{CM}}\right)^2 .$$

Kwadrat czterowektora jest niezmiennikiem.

Układ środka masy

Stąd

$$\frac{\left(E_1^{\mathrm{LAB}} + m_p c^2\right)^2}{c^2} - \left(\vec{p}_1^{\,\mathrm{LAB}} + \vec{0}\right)^2 = \frac{\left(E_1^{\mathrm{CM}} + E_2^{\mathrm{CM}}\right)^2}{c^2} - \vec{0}^2,$$

Pomnóżmy obie strony tego równania przez c^2 i zauważmy, że

$$E_1^{\mathrm{CM}} + E_2^{\mathrm{CM}} = E^{\mathrm{CM}},$$

gdzie E^{CM} jest całkowitą energią w układzie środka masy, wówczas dostaniemy

Stąd

$$\frac{\left(E_1^{\mathrm{LAB}}+m_pc^2\right)^2}{c^2}-\left(\vec{p}_1^{\,\mathrm{LAB}}+\vec{0}\right)^2=\frac{\left(E_1^{\mathrm{CM}}+E_2^{\mathrm{CM}}\right)^2}{c^2}-\vec{0}^2,$$

Pomnóżmy obie strony tego równania przez c^2 i zauważmy, że

$$E_1^{\mathrm{CM}}+E_2^{\mathrm{CM}}=E^{\mathrm{CM}},$$

gdzie E^{CM} jest całkowitą energią w układzie środka masy, wówczas dostaniemy

$$\underbrace{\left(E_1^{\mathrm{LAB}}\right)^2-\left(\vec{p}_1^{\,\mathrm{LAB}}\right)^2c^2}_{m_p^2c^4}+m_p^2c^4+2E_1^{\mathrm{LAB}}m_pc^2=\left(E^{\mathrm{CM}}\right)^2.$$

Stąd

$$\frac{\left(E_1^{\mathrm{LAB}} + m_p c^2\right)^2}{c^2} - \left(\vec{p}_1^{\,\mathrm{LAB}} + \vec{0}\right)^2 = \frac{\left(E_1^{\mathrm{CM}} + E_2^{\mathrm{CM}}\right)^2}{c^2} - \vec{0}^2,$$

Pomnóżmy obie strony tego równania przez c^2 i zauważmy, że

$$E_1^{\mathrm{CM}} + E_2^{\mathrm{CM}} = E^{\mathrm{CM}},$$

gdzie E^{CM} jest całkowitą energią w układzie środka masy, wówczas dostaniemy

$$\underbrace{\left(E_1^{\mathrm{LAB}}\right)^2 - \left(\vec{p}_1^{\,\mathrm{LAB}}\right)^2 c^2}_{m_p^2 c^4} + m_p^2 c^4 + 2E_1^{\mathrm{LAB}} m_p c^2 = \left(E^{\mathrm{CM}}\right)^2.$$

a zatem

$$2m_pc^2 \underbrace{\overbrace{\left(E_1^{\mathrm{LAB}} + m_pc^2\right)}^{\text{całkowita energia}}}_{E^{\mathrm{LAB}}} = \left(E^{\mathrm{CM}}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad E^{\mathrm{LAB}} = \frac{\left(E^{\mathrm{CM}}\right)^2}{2m_pc^2}.$$

Przykład 2. Jaka musi być całkowita energia protonów w układzie laboratoryjnym, aby energia całkowita w układzie środka masy wynosiła 20 GeV?

Układ środka masy

a zatem

$$2m_pc^2 \underbrace{\overbrace{\left(E_1^{\mathrm{LAB}} + m_pc^2\right)}^{\text{całkowita energia}}}_{E^{\mathrm{LAB}}} = \left(E^{\mathrm{CM}}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad E^{\mathrm{LAB}} = \frac{\left(E^{\mathrm{CM}}\right)^2}{2m_pc^2}.$$

Przykład 2. Jaka musi być całkowita energia protonów w układzie laboratoryjnym, aby energia całkowita w układzie środka masy wynosiła 20 GeV?

$$m_p = 938.27203 \pm 0.00008 \ \mathrm{MeV}/c^2 \quad \Rightarrow \quad m_pc^2 \approx 1 \ \mathrm{GeV}$$

$$E^{\mathrm{LAB}} = \frac{\left(E^{\mathrm{CM}}\right)^2}{2m_pc^2} \approx \frac{20^2}{2} \ \mathrm{GeV} = 200 \ \mathrm{GeV}.$$

Układ środka masy

a zatem

$$2m_pc^2 \underbrace{\overbrace{\left(E_1^{\mathrm{LAB}} + m_pc^2\right)}^{\text{całkowita energia}}}_{E^{\mathrm{LAB}}} = \left(E^{\mathrm{CM}}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad E^{\mathrm{LAB}} = \frac{\left(E^{\mathrm{CM}}\right)^2}{2m_pc^2}.$$

Przykład 2. Jaka musi być całkowita energia protonów w układzie laboratoryjnym, aby energia całkowita w układzie środka masy wynosiła 20 GeV?

$$m_p = 938.27203 \pm 0.00008\ \mathrm{MeV}/c^2 \quad \Rightarrow \quad m_pc^2 \approx 1\ \mathrm{GeV}$$

$$E^{\mathrm{LAB}} = \frac{\left(E^{\mathrm{CM}}\right)^2}{2m_pc^2} \approx \frac{20^2}{2}\ \mathrm{GeV} = 200\ \mathrm{GeV}.$$

Dlatego buduje się akceleratory wiązek przeciwbieżnych, w których zderza się ze sobą wiązki cząstek biegnących naprzeciw siebie z takimi samymi pędami.

Dlatego buduje się akceleratory wiązek przeciwbieżnych, w których zderza się ze sobą wiązki cząstek biegnących naprzeciw siebie z takimi samymi pędami.

W akceleratorach wiązek przeciwbieżnych, jeżeli zderzane są cząstki punktowe o tej samej masie, jak np. elektron i pozyton, to układ laboratoryjny pokrywa się z układem środka masy, w którym sumaryczny pęd jest zerowy i cała energia może być wykorzystana na wygenerowanie masy (energii spoczynkowej) produktów reakcji.

Układ środka masy

Dlatego buduje się akceleratory wiązek przeciwbieżnych, w których zderza się ze sobą wiązki cząstek biegnących naprzeciw siebie z takimi samymi pędami.
W akceleratorach wiązek przeciwbieżnych, jeżeli zderzane są cząstki punktowe o tej samej masie, jak np. elektron i pozyton, to układ laboratoryjny pokrywa się z układem środka masy, w którym sumaryczny pęd jest zerowy i cała energia może być wykorzystana na wygenerowanie masy (energii spoczynkowej) produktów reakcji.
Wielki Zderzacz Hadronów LHC w CERN-ie jest też tego rodzaju akceleratorem, ale zderzane w nim protony są cząstkami złożonymi. Ich składniki, tzw. partony, czyli kwarki i gluony, unoszą różne ułamki pędu macierzystych protonów, dlatego układ środka masy zderzających się partonów porusza się w układzie laboratoryjnym.

Dlatego buduje się akceleratory wiązek przeciwbieżnych, w których zderza się ze sobą wiązki cząstek biegnących naprzeciw siebie z takimi samymi pędami.
W akceleratorach wiązek przeciwbieżnych, jeżeli zderzane są cząstki punktowe o tej samej masie, jak np. elektron i pozyton, to układ laboratoryjny pokrywa się z układem środka masy, w którym sumaryczny pęd jest zerowy i cała energia może być wykorzystana na wygenerowanie masy (energii spoczynkowej) produktów reakcji.
Wielki Zderzacz Hadronów LHC w CERN-ie jest też tego rodzaju akceleratorem, ale zderzane w nim protony są cząstkami złożonymi. Ich składniki, tzw. partony, czyli kwarki i gluony, unoszą różne ułamki pędu macierzystych protonów, dlatego układ środka masy zderzających się partonów porusza się w układzie laboratoryjnym.

Czteropęd cząstki bezmasowej

Zauważmy, że dla cząstki bezmasowej, *(np. fotonu)*, $m = 0$,

$$E^2 - \vec{p}^2 c^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad E^2 = \vec{p}^2 c^2 \quad \Rightarrow \quad |\vec{p}| = \frac{E}{c}.$$

Cząstka bezmasowa o niezerowej energii ma relatywistyczny pęd,

Czteropęd cząstki bezmasowej

Zauważmy, że dla cząstki bezmasowej, *(np. fotonu)*, $m = 0$,

$$E^2 - \vec{p}^2 c^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad E^2 = \vec{p}^2 c^2 \quad \Rightarrow \quad |\vec{p}| = \frac{E}{c}.$$

Cząstka bezmasowa o niezerowej energii ma relatywistyczny pęd, a jej czteropęd

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) = (|\vec{p}|, \vec{p})$$

jest czterowektorem o zerowej normie, gdyż

$$\|p^\mu\|^2 = p \cdot p = \left(p^0\right)^2 - (\vec{p})^2 = |\vec{p}|^2 - |\vec{p}|^2 = 0.$$

Czteropęd cząstki bezmasowej

Zauważmy, że dla cząstki bezmasowej, *(np. fotonu),* $m = 0$,

$$E^2 - \vec{p}^2 c^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad E^2 = \vec{p}^2 c^2 \quad \Rightarrow \quad |\vec{p}| = \frac{E}{c}.$$

Cząstka bezmasowa o niezerowej energii ma relatywistyczny pęd, a jej czteropęd

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) = \left(|\vec{p}|\,, \vec{p}\right)$$

jest czterowektorem o zerowej normie, gdyż

$$\|p^\mu\|^2 = p \cdot p = \left(p^0\right)^2 - \left(\vec{p}\right)^2 = |\vec{p}|^2 - |\vec{p}|^2 = 0.$$

Czterowektor falowy

Przypomnijmy postulat Einsteina *(dla światła)*

$$E = h\nu = \hbar\omega, \qquad \text{gdzie} \quad \omega = 2\pi\nu, \quad \hbar \equiv \frac{h}{2\pi}$$

i postulat de Broglie'go *(dla fotonu lub cząstki masowej)*

$$\vec{p} = \hbar\vec{k},$$

gdzie $\vec{k}$ – wektor falowy, który wiąże się z długością fali λ wzorem

$$|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Czterowektor falowy

Przypomnijmy postulat Einsteina *(dla światła)*

$$E = h\nu = \hbar\omega, \qquad \text{gdzie} \quad \omega = 2\pi\nu, \quad \hbar \equiv \frac{h}{2\pi}$$

i postulat de Broglie'go *(dla fotonu lub cząstki masowej)*

$$\vec{p} = \hbar\vec{k},$$

gdzie $\vec{k}$ – wektor falowy, który wiąże się z długością fali λ wzorem

$$|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Zdefiniujmy czterowektor falowy wzorem

$$p^\mu = \hbar k^\mu = \hbar\left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right).$$

Czterowektor falowy

Przypomnijmy postulat Einsteina *(dla światła)*

$$E = h\nu = \hbar\omega, \qquad \text{gdzie} \quad \omega = 2\pi\nu, \quad \hbar \equiv \frac{h}{2\pi}$$

i postulat de Broglie'go *(dla fotonu lub cząstki masowej)*

$$\vec{p} = \hbar\vec{k},$$

gdzie $\vec{k}$ – wektor falowy, który wiąże się z długością fali λ wzorem

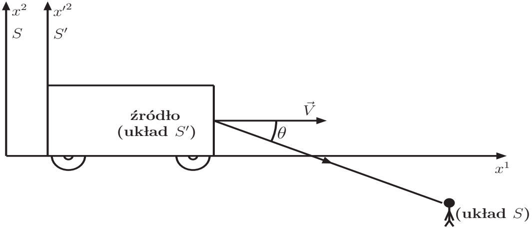
$$|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Zdefiniujmy czterowektor falowy wzorem

$$p^\mu = \hbar k^\mu = \hbar\left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right).$$

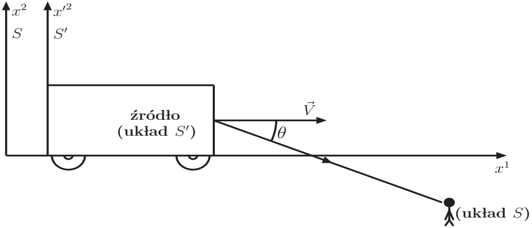
Efekt Dopplera dla światła

k^μ jest na pewno poprawnie zdefiniowanym czterowektorem.



Efekt Dopplera dla światła

k^μ jest na pewno poprawnie zdefiniowanym czterowektorem.

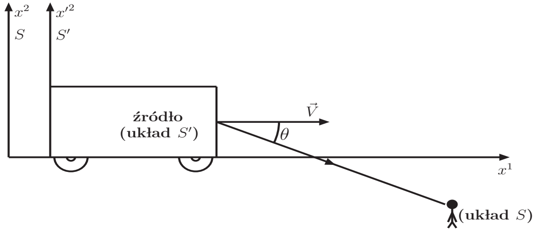


Dlatego jego zerowa składowa transformuje się wg wzoru

$$k'^0 = \gamma \left(k^0 - \beta k^1 \right).$$

Efekt Dopplera dla światła

k^μ jest na pewno poprawnie zdefiniowanym czterowektorem.

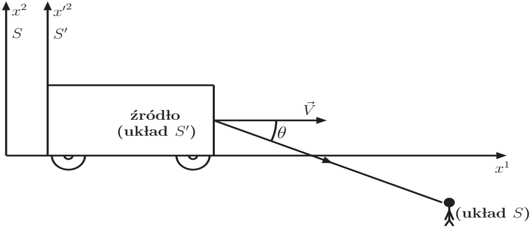


Dlatego jego zerowa składowa transformuje się wg wzoru

$$k'^0 = \gamma\left(k^0 - \beta k^1\right).$$

Podstawmy $k^0 = \frac{\omega}{c}$, $\quad k^1 = |\vec{k}|\cos\theta = \frac{\omega}{c}\cos\theta$, $\quad k'^0 = \frac{\omega'}{c}$.

k^μ jest na pewno poprawnie zdefiniowanym czterowektorem.



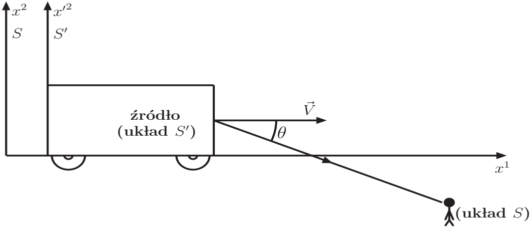
Dlatego jego zerowa składowa transformuje się wg wzoru

$$k'^0 = \gamma \left(k^0 - \beta k^1\right).$$

Podstawmy $k^0 = \frac{\omega}{c}$, $\quad k^1 = |\vec{k}| \cos\theta = \frac{\omega}{c} \cos\theta$, $\quad k'^0 = \frac{\omega'}{c}$.

$$\Rightarrow \quad \omega' = \gamma\omega \left(1 - \beta\cos\theta\right) \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{\omega'}{\gamma\left(1 - \beta\cos\theta\right)}.$$

k^μ jest na pewno poprawnie zdefiniowanym czterowektorem.



Dlatego jego zerowa składowa transformuje się wg wzoru

$$k'^0 = \gamma\left(k^0 - \beta k^1\right).$$

Podstawmy $k^0 = \frac{\omega}{c}$, $\quad k^1 = |\vec{k}|\cos\theta = \frac{\omega}{c}\cos\theta$, $\quad k'^0 = \frac{\omega'}{c}$.

$$\Rightarrow \quad \omega' = \gamma\omega\left(1 - \beta\cos\theta\right) \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{\omega'}{\gamma\left(1 - \beta\cos\theta\right)}.$$

Ponieważ ω' jest częstotliwością światła mierzoną w układzie źródła, które porusza się względem obserwatora z prędkością $\vec{V} = (V, 0, 0)$, to oznaczmy $\omega' = \omega_0$. Wówczas

$$\boxed{\omega = \frac{\omega_0}{\gamma(1-\beta\cos\theta)},}$$

gdzie
ω – częstotliwość światła mierzona przez obserwatora,
θ – kąt pomiędzy wektorem prędkości źródła $\vec{V}$ a kierunkiem obserwacji światła.

Efekt Dopplera dla światła

Ponieważ ω' jest częstotliwością światła mierzoną w układzie źródła, które porusza się względem obserwatora z prędkością $\vec{V} = (V, 0, 0)$, to oznaczmy $\omega' = \omega_0$. Wówczas

$$\boxed{\omega = \frac{\omega_0}{\gamma(1-\beta\cos\theta)},}$$

gdzie
ω – częstotliwość światła mierzona przez obserwatora,
θ – kąt pomiędzy wektorem prędkości źródła $\vec{V}$ a kierunkiem obserwacji światła.

Jeżeli źródło porusza się w kierunku obserwatora znajdującego się na dodatniej półosi Ox, tzn. $\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = 1,$ to

$$\omega = \frac{\omega_0}{\gamma\,(1-\beta)},$$

Jeżeli źródło porusza się w kierunku obserwatora znajdującego się na dodatniej półosi Ox, tzn. $\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = 1$, to

$$\omega = \frac{\omega_0}{\gamma\,(1-\beta)},$$

a uwzględniając, że

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta)(1+\beta)}}$$

otrzymamy

Efekt Dopplera dla światła

Jeżeli źródło porusza się w kierunku obserwatora znajdującego się na dodatniej półosi Ox, tzn. $\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = 1$, to

$$\omega = \frac{\omega_0}{\gamma\,(1-\beta)},$$

a uwzględniając, że

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta)(1+\beta)}}$$

otrzymamy

$$\omega = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,\omega_0.$$

Efekt Dopplera dla światła

Jeżeli źródło porusza się w kierunku obserwatora znajdującego się na dodatniej półosi Ox, tzn. $\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = 1$, to

$$\omega = \frac{\omega_0}{\gamma\,(1-\beta)},$$

a uwzględniając, że

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta)(1+\beta)}}$$

otrzymamy

$$\omega = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,\omega_0.$$

Ponieważ źródło porusza się zawsze z prędkością mniejszą od prędkości światła w próżni, to

$$-1 \; < \; \beta = v^1/c \; < \; 1$$

i z wzoru

$$\omega = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,\omega_0$$

widzimy, że

- jeśli źródło oddala się od obserwatora, tzn. $\beta < 0$

Efekt Dopplera dla światła

Ponieważ źródło porusza się zawsze z prędkością mniejszą od prędkości światła w próżni, to

$$-1 \; < \; \beta = v^1/c \; < \; 1$$

i z wzoru

$$\omega = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,\omega_0$$

widzimy, że

- jeśli źródło oddala się od obserwatora, tzn.
  $\beta < 0 \quad \Rightarrow \quad \omega < \omega_0,$ *(przesunięcie ku czerwieni)*

Ponieważ źródło porusza się zawsze z prędkością mniejszą od prędkości światła w próżni, to

$$-1 \; < \; \beta = v^1/c \; < \; 1$$

i z wzoru

$$\omega = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,\omega_0$$

widzimy, że

- jeśli źródło oddala się od obserwatora, tzn.
  $\beta < 0 \quad \Rightarrow \quad \omega < \omega_0,$ *(przesunięcie ku czerwieni)*
- jeśli źródło zbliża się do obserwatora, tzn.
  $\beta > 0$

Efekt Dopplera dla światła

Ponieważ źródło porusza się zawsze z prędkością mniejszą od prędkości światła w próżni, to

$$-1 \;<\; \beta = v^1/c \;<\; 1$$

i z wzoru

$$\omega = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,\omega_0$$

widzimy, że

- jeśli źródło oddala się od obserwatora, tzn.
  $\beta < 0 \quad \Rightarrow \quad \omega < \omega_0, \qquad$ *(przesunięcie ku czerwieni)*
- jeśli źródło zbliża się do obserwatora, tzn.
  $\beta > 0 \quad \Rightarrow \quad \omega > \omega_0. \qquad$ *(przesunięcie do fioletu)*

Efekt Dopplera dla światła

Ponieważ źródło porusza się zawsze z prędkością mniejszą od prędkości światła w próżni, to

$$-1 \ < \ \beta = v^1/c \ < \ 1$$

i z wzoru

$$\omega = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,\omega_0$$

widzimy, że

- jeśli źródło oddala się od obserwatora, tzn.
  $\beta < 0 \quad \Rightarrow \quad \omega < \omega_0,$ *(przesunięcie ku czerwieni)*
- jeśli źródło zbliża się do obserwatora, tzn.
  $\beta > 0 \quad \Rightarrow \quad \omega > \omega_0.$ *(przesunięcie do fioletu)*

Pojęcie siły w teorii względności jest dość skomplikowane, m.in. dlatego, że wektor

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

nie jest dobrze określoną częścią przestrzenną czterowektora.

Siła w teorii względności

Pojęcie siły w teorii względności jest dość skomplikowane, m.in. dlatego, że wektor

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

nie jest dobrze określoną częścią przestrzenną czterowektora. Ponadto, masa, która wiąże się z energią w układzie spoczynkowym wzorem

$$E_0 = mc^2 \qquad \Rightarrow \qquad m = \frac{E_0}{c^2},$$

nie musi być wielkością stałą dla ciał złożonych. Np. jeśli podgrzejemy takie ciało, to jego energia wewnętrzna wzrośnie.

Siła w teorii względności

Pojęcie siły w teorii względności jest dość skomplikowane, m.in. dlatego, że wektor

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

nie jest dobrze określoną częścią przestrzenną czterowektora. Ponadto, masa, która wiąże się z energią w układzie spoczynkowym wzorem

$$E_0 = mc^2 \qquad \Rightarrow \qquad m = \frac{E_0}{c^2},$$

nie musi być wielkością stałą dla ciał złożonych. Np. jeśli podgrzejemy takie ciało, to jego energia wewnętrzna wzrośnie. Zmiany masy wynikające ze zmiany energii wewnętrznej są na ogół nieznaczne. Dlatego założymy, że masa ciała nie zmienia się w czasie.

Siła w teorii względności

Pojęcie siły w teorii względności jest dość skomplikowane, m.in. dlatego, że wektor

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

nie jest dobrze określoną częścią przestrzenną czterowektora. Ponadto, masa, która wiąże się z energią w układzie spoczynkowym wzorem

$$E_0 = mc^2 \qquad \Rightarrow \qquad m = \frac{E_0}{c^2},$$

nie musi być wielkością stałą dla ciał złożonych. Np. jeśli podgrzejemy takie ciało, to jego energia wewnętrzna wzrośnie. Zmiany masy wynikające ze zmiany energii wewnętrznej są na ogół nieznaczne. Dlatego założymy, że masa ciała nie zmienia się w czasie.

Mimo skomplikowanych własności transformacyjnych definicja

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

dobrze zgadza się z siłą Lorentza

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

działającą na ładunek q w polu elektromagnetycznym o natężeniu $\vec{E}$ i indukcji $\vec{B}$.

Siła w teorii względności

Mimo skomplikowanych własności transformacyjnych definicja

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

dobrze zgadza się z siłą Lorentza

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

działającą na ładunek q w polu elektromagnetycznym o natężeniu $\vec{E}$ i indukcji $\vec{B}$.

Nasza definicja spełnia również związek pomiędzy przyrostem energii kinetycznej ciała, a pracą nad nim wykonaną.

Aby się o tym przekonać, zróżniczkujmy związek

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \quad / \qquad E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4 \quad \Rightarrow \quad 2E\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 2\vec{p}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}c^2$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{c^2}{E}\vec{p}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{c^2}{\gamma m c^2}\gamma m\vec{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{v}\cdot\vec{F},$$

Nasza definicja spełnia również związek pomiędzy przyrostem energii kinetycznej ciała, a pracą nad nim wykonaną.
Aby się o tym przekonać, zróżniczkujmy związek

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \quad / \qquad E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4 \quad \Rightarrow \quad 2E\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 2\vec{p} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} c^2$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{c^2}{E}\vec{p} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{c^2}{\gamma m c^2}\gamma m \vec{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{v} \cdot \vec{F},$$

a więc

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \vec{v} \cdot \vec{F} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}E = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x}.$$

Nasza definicja spełnia również związek pomiędzy przyrostem energii kinetycznej ciała, a pracą nad nim wykonaną.
Aby się o tym przekonać, zróżniczkujmy związek

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \quad / \qquad E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4 \quad \Rightarrow \quad 2E\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 2\vec{p}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}c^2$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{c^2}{E}\vec{p}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{c^2}{\gamma m c^2}\gamma m\vec{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{v}\cdot\vec{F},$$

a więc

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \vec{v}\cdot\vec{F} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}E = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{x}.$$

Uwzględniając, że

$$E = mc^2 + T,$$

gdzie T jest energią kinetyczną ciała, otrzymamy

$$\mathrm{d}T = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x}.$$

Uwzględniając, że

$$E = mc^2 + T,$$

gdzie T jest energią kinetyczną ciała, otrzymamy

$$\mathrm{d}T = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x}.$$

Przyrost energii kinetycznej ciała jest równy wykonanej nad nim pracy.

Uwzględniając, że

$$E = mc^2 + T,$$

gdzie T jest energią kinetyczną ciała, otrzymamy

$$\mathrm{d}T = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x}.$$

Przyrost energii kinetycznej ciała jest równy wykonanej nad nim pracy.

Załóżmy, że $\vec{F} = \mathrm{const.}$ W chwili $t = 0$ ciało spoczywa w początku układu, czyli $\vec{x}(0) = \vec{0}$ i $\vec{v}(0) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{p}(0) = \vec{0}$. Wówczas

$$\mathrm{d}\vec{p} = \vec{F}\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = \vec{F}t.$$

$$E^2 = \left(\gamma mc^2\right)^2 = m^2c^4 + \vec{p}^2c^2 \quad \Rightarrow \quad \gamma = \sqrt{1 + \frac{\vec{p}^2}{m^2c^2}},$$

gdzie odrzuciliśmy ujemne rozwiązanie.

Załóżmy, że $\vec{F} = \mathrm{const.}$ W chwili $t = 0$ ciało spoczywa w początku układu, czyli $\vec{x}(0) = \vec{0}$ i $\vec{v}(0) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{p}(0) = \vec{0}$. Wówczas

$$\mathrm{d}\vec{p} = \vec{F}\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = \vec{F}t.$$

$$E^2 = \left(\gamma mc^2\right)^2 = m^2c^4 + \vec{p}^2c^2 \quad \Rightarrow \quad \gamma = \sqrt{1 + \frac{\vec{p}^2}{m^2c^2}},$$

gdzie odrzuciliśmy ujemne rozwiązanie. Z definicji pędu

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{m\gamma} = \frac{\vec{F}t}{m\sqrt{1 + \frac{\vec{F}^2t^2}{m^2c^2}}} = \frac{\vec{F}t}{m\sqrt{1 + \frac{F^2t^2}{m^2c^2}}}.$$

Ruch w polu stałej siły

Załóżmy, że $\vec{F} = \mathrm{const.}$ W chwili $t = 0$ ciało spoczywa w początku układu, czyli $\vec{x}(0) = \vec{0}$ i $\vec{v}(0) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{p}(0) = \vec{0}$. Wówczas

$$\mathrm{d}\vec{p} = \vec{F}\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = \vec{F}t.$$

$$E^2 = \left(\gamma mc^2\right)^2 = m^2c^4 + \vec{p}^2c^2 \quad \Rightarrow \quad \gamma = \sqrt{1 + \frac{\vec{p}^2}{m^2c^2}},$$

gdzie odrzuciliśmy ujemne rozwiązanie. Z definicji pędu

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{m\gamma} = \frac{\vec{F}t}{m\sqrt{1 + \frac{\vec{F}^2t^2}{m^2c^2}}} = \frac{\vec{F}t}{m\sqrt{1 + \frac{F^2t^2}{m^2c^2}}}.$$

$\Rightarrow$

Załóżmy, że $\vec{F} = \mathrm{const.}$ W chwili $t = 0$ ciało spoczywa w początku układu, czyli $\vec{x}(0) = \vec{0}$ i $\vec{v}(0) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{p}(0) = \vec{0}$. Wówczas

$$\mathrm{d}\vec{p} = \vec{F}\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = \vec{F}t.$$

$$E^2 = \left(\gamma mc^2\right)^2 = m^2c^4 + \vec{p}^2c^2 \quad \Rightarrow \quad \gamma = \sqrt{1 + \frac{\vec{p}^2}{m^2c^2}},$$

gdzie odrzuciliśmy ujemne rozwiązanie. Z definicji pędu

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{m\gamma} = \frac{\vec{F}t}{m\sqrt{1 + \frac{\vec{F}^2t^2}{m^2c^2}}} = \frac{\vec{F}t}{m\sqrt{1 + \frac{F^2t^2}{m^2c^2}}}.$$

$$\Rightarrow \quad \vec{x} = \int \vec{v}\mathrm{d}t = \int \frac{\vec{F}t}{m\sqrt{1 + \frac{F^2t^2}{m^2c^2}}}\,\mathrm{d}t = \frac{\vec{F}}{m}\int \frac{t}{\sqrt{1 + \frac{F^2t^2}{m^2c^2}}}\,\mathrm{d}t.$$

Załóżmy, że $\vec{F} = \mathrm{const.}$ W chwili $t = 0$ ciało spoczywa w początku układu, czyli $\vec{x}(0) = \vec{0}$ i $\vec{v}(0) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{p}(0) = \vec{0}$. Wówczas

$$\mathrm{d}\vec{p} = \vec{F}\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = \vec{F}t.$$

$$E^2 = \left(\gamma mc^2\right)^2 = m^2c^4 + \vec{p}^2c^2 \quad \Rightarrow \quad \gamma = \sqrt{1 + \frac{\vec{p}^2}{m^2c^2}},$$

gdzie odrzuciliśmy ujemne rozwiązanie. Z definicji pędu

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{m\gamma} = \frac{\vec{F}t}{m\sqrt{1 + \frac{\vec{F}^2t^2}{m^2c^2}}} = \frac{\vec{F}t}{m\sqrt{1 + \frac{F^2t^2}{m^2c^2}}}.$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{x} = \int \vec{v}\mathrm{d}t = \int \frac{\vec{F}t}{m\sqrt{1 + \frac{F^2t^2}{m^2c^2}}}\,\mathrm{d}t = \frac{\vec{F}}{m}\int \frac{t}{\sqrt{1 + \frac{F^2t^2}{m^2c^2}}}\,\mathrm{d}t.$$

Podstawmy

$$u = \sqrt{1+\frac{F^2t^2}{m^2c^2}} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}u = \frac{2\frac{F^2}{m^2c^2}t\mathrm{d}t}{2\sqrt{1+\frac{F^2t^2}{m^2c^2}}} = \frac{F^2}{m^2c^2}\frac{t\mathrm{d}t}{u}$$

$$\Rightarrow \quad t\mathrm{d}t = \frac{m^2c^2}{F^2}u\mathrm{d}u$$

i obliczmy całkę

$$\vec{x}(t) = \frac{\vec{F}}{m}\int\frac{t\mathrm{d}t}{\sqrt{1+\frac{F^2t^2}{m^2c^2}}} = \frac{\vec{F}}{m}\frac{m^2c^2}{F^2}\int\frac{u\mathrm{d}u}{u} = \frac{mc^2}{F^2}\vec{F}\int\mathrm{d}u$$

$$= \frac{mc^2}{F^2}\vec{F}u + \vec{C} = \frac{mc^2}{F^2}\vec{F}\sqrt{1+\frac{F^2t^2}{m^2c^2}} + \vec{C}.$$

Podstawmy

$$u = \sqrt{1+\frac{F^2t^2}{m^2c^2}} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}u = \frac{2\frac{F^2}{m^2c^2}t\mathrm{d}t}{2\sqrt{1+\frac{F^2t^2}{m^2c^2}}} = \frac{F^2}{m^2c^2}\frac{t\mathrm{d}t}{u}$$

$$\Rightarrow \quad t\mathrm{d}t = \frac{m^2c^2}{F^2}u\mathrm{d}u$$

i obliczmy całkę

$$\vec{x}(t) = \frac{\vec{F}}{m}\int\frac{t\mathrm{d}t}{\sqrt{1+\frac{F^2t^2}{m^2c^2}}} = \frac{\vec{F}}{m}\frac{m^2c^2}{F^2}\int\frac{u\mathrm{d}u}{u} = \frac{mc^2}{F^2}\vec{F}\int\mathrm{d}u$$

$$= \frac{mc^2}{F^2}\vec{F}u + \vec{C} = \frac{mc^2}{F^2}\vec{F}\sqrt{1+\frac{F^2t^2}{m^2c^2}} + \vec{C}.$$

Uwzględnijmy warunek początkowy $\vec{x}(0) = \vec{0}$

$$\vec{x}(0) = \frac{mc^2}{F^2}\vec{F}\sqrt{1 + \frac{F^2 0^2}{m^2 c^2}} + \vec{C} = \frac{mc^2}{F^2}\vec{F} + \vec{C} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{C} = -\frac{mc^2}{F^2}\vec{F}.$$

Ostateczny wynik ma postać

$$\vec{x}(t) = \frac{mc^2}{F^2}\left(\sqrt{1 + \frac{F^2 t^2}{m^2 c^2}} - 1\right)\vec{F}.$$

Uwzględnijmy warunek początkowy $\vec{x}(0) = \vec{0}$

$$\vec{x}(0) = \frac{mc^2}{F^2}\vec{F}\sqrt{1+\frac{F^2 0^2}{m^2c^2}} + \vec{C} = \frac{mc^2}{F^2}\vec{F} + \vec{C} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{C} = -\frac{mc^2}{F^2}\vec{F}.$$

Ostateczny wynik ma postać

$$\vec{x}(t) = \frac{mc^2}{F^2}\left(\sqrt{1+\frac{F^2t^2}{m^2c^2}} - 1\right)\vec{F}.$$

Dla krótkich czasów otrzymujemy

$$\vec{x}(t) \approx \frac{mc^2}{F^2}\left(1+\frac{1}{2}\frac{F^2t^2}{m^2c^2} - 1\right)\vec{F} = \frac{1}{2}\frac{\vec{F}}{m}t^2 = \frac{1}{2}\vec{a}\,t^2,$$

a więc wynik taki sam jak w przypadku nierelatywistycznym.

Uwzględnijmy warunek początkowy $\vec{x}(0) = \vec{0}$

$$\vec{x}(0) = \frac{mc^2}{F^2}\vec{F}\sqrt{1 + \frac{F^2 0^2}{m^2 c^2}} + \vec{C} = \frac{mc^2}{F^2}\vec{F} + \vec{C} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{C} = -\frac{mc^2}{F^2}\vec{F}.$$

Ostateczny wynik ma postać

$$\vec{x}(t) = \frac{mc^2}{F^2}\left(\sqrt{1 + \frac{F^2 t^2}{m^2 c^2}} - 1\right)\vec{F}.$$

Dla krótkich czasów otrzymujemy

$$\vec{x}(t) \approx \frac{mc^2}{F^2}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{F^2 t^2}{m^2 c^2} - 1\right)\vec{F} = \frac{1}{2}\frac{\vec{F}}{m}t^2 = \frac{1}{2}\vec{a}\, t^2,$$

a więc wynik taki sam jak w przypadku nierelatywistycznym.

Można zdefiniować czterowektor siły

$$K^\mu = \frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}t_0},$$

gdzie t_0 – czas własny.

Jest to niewątpliwie poprawnie zdefiniowany czterowektor, gdyż t_0 jest lorentzowskim skalarem.

Czterowektor siły

Można zdefiniować czterowektor siły

$$K^{\mu} = \frac{\mathrm{d}p^{\mu}}{\mathrm{d}t_0},$$

gdzie t_0 – czas własny.
Jest to niewątpliwie poprawnie zdefiniowany czterowektor, gdyż t_0 jest lorentzowskim skalarem. Związek z trójsiłą ma postać

$$K^{\mu} = \gamma \frac{\mathrm{d}p^{\mu}}{\mathrm{d}t} = \gamma \left(\frac{1}{c} \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \right) = \gamma \left(\vec{v} \cdot \vec{F}/c, \vec{F} \right).$$

Można zdefiniować czterowektor siły

$$K^\mu = \frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}t_0},$$

gdzie t_0 – czas własny.
Jest to niewątpliwie poprawnie zdefiniowany czterowektor, gdyż t_0 jest lorentzowskim skalarem. Związek z trójsiłą ma postać

$$K^\mu = \gamma \frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}t} = \gamma \left(\frac{1}{c} \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \right) = \gamma \left(\vec{v} \cdot \vec{F}/c, \vec{F} \right).$$

Czterosiła nie ma większego zastosowania, głównie ze względu na to, że w jej definicji występuje czas własny, a my na ogół chcemy badać ruch ciał (ewolucję układu w czasie) w dowolnym inercjalnym układzie odniesienia.

Można zdefiniować czterowektor siły

$$K^{\mu} = \frac{\mathrm{d}p^{\mu}}{\mathrm{d}t_0},$$

gdzie t_0 – czas własny.
Jest to niewątpliwie poprawnie zdefiniowany czterowektor, gdyż t_0 jest lorentzowskim skalarem. Związek z trójsiłą ma postać

$$K^{\mu} = \gamma \frac{\mathrm{d}p^{\mu}}{\mathrm{d}t} = \gamma \left(\frac{1}{c} \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \right) = \gamma \left(\vec{v} \cdot \vec{F}/c, \vec{F} \right).$$

Czterosiła nie ma większego zastosowania, głównie ze względu na to, że w jej definicji występuje czas własny, a my na ogół chcemy badać ruch ciał (ewolucję układu w czasie) w dowolnym inercjalnym układzie odniesienia.